HAL open science

On families of constrictions in model of overdamped Josephson junction.

Alexey Glutsyuk, Yulia Bibilo

To cite this version:

Alexey Glutsyuk, Yulia Bibilo. On families of constrictions in model of overdamped Josephson junction.. Russian Mathematical Surveys, 2020, 76 (2), pp.179-180. 10.1070/RM9982 . ensl-03041406

HAL Id: ensl-03041406

https://ens-lyon.hal.science/ensl-03041406v1

Submitted on 4 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

УДК 517.925.7

О СЕМЕЙСТВАХ ПЕРЕМЫЧЕК В МОДЕЛИ СИЛЬНО ШУНТИРОВАННОГО ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ПЕРЕХОДА

Ю.П.Бибило, А.А.Глуцюк*

Эффект туннелирования, предсказанный Б.Джозефсоном в 1962 г. [7] (Нобелевская премия по физике за 1973 г.), относится к системе двух сверхпроводников, разделенных тонким диэлектриком. Он состоит в том, что если диэлектрик достаточно тонок, то через систему (называемую *Джозефсоновским переходом*) потечет сверхпроводящий ток, описанный уравнениями Джозефсона. В статье исследуется модель *сильно шунтированного перехода Джозефсона* (см. [3] и библ.), задаваемая семейством уравнений

$$\frac{d\phi}{dt} = -\sin\phi + B + A\cos\omega t,\ \omega > 0,\ B \geq 0. \tag{0.1}$$

Здесь ϕ - это разность фаз (аргументов) комплекснозначных волновых функций, описывающих состояния двух сверхпроводников. Ее производная равна напряжению, с точностью до известного постоянного множителя. Константа ω, называемая *частотой,* фиксирована; $(B, A) \in \mathbb{R}^2$ – параметры уравнения (0.1); B – абсцисса, A – ордината.

Замены $\tau = \omega t$, $\ell = \frac{B}{\omega}$, $\mu = \frac{A}{2\omega}$ переводят (0.1) в уравнение на торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2_{(\phi,\tau)}/2\pi\mathbb{Z}^2$: $\frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{\sin\phi}{\omega} + \ell + 2\mu\cos\tau$. Графики его решений – орбиты векторного поля на $\mathbb{T}^2$:

$$\begin{cases} \dot\phi = -\frac{\sin\phi}{\omega} + \ell + 2\mu\cos\tau \\ \dot\tau = 1 \end{cases}. \tag{0.2}$$

Его *числом вращения*, см. [1, p. 97], называется функция $\rho(B, A; \omega) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\phi(2\pi k)}{2\pi k}$, которая, как известно, корректно определена и не зависит от выбора решения $\phi(\tau)$. *Зоной фазового захвата* (см. [4, определение 1.1]) называется множество уровня $L_r = L_r(\omega) = \{\rho(B, A) = r\} \subset \mathbb{R}^2$, если оно имеет непустую внутренность (аналог языков Арнольда [1, стр. 103].) Известно, что зоны захвата существуют только для целых чисел вращения [3]. Каждая из них – гирлянда из бесконечного числа связных компонент; любые две соседние компоненты разделены точкой, называемой *перемычкой,* если она не лежит на оси абсцисс A, и *точкой роста,* если лежит ([8] и библ.). См. Рис. 1.

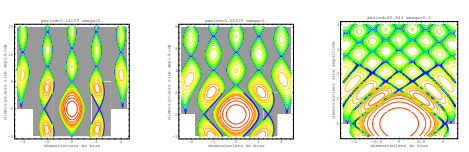

Рис. 1: зоны захвата для $\omega = 2, 1, 0.3$ [2, рис.1а,б,д].

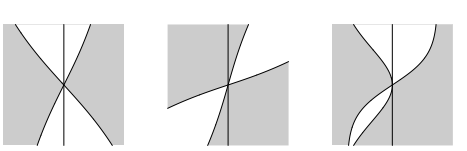

Рис. 2 (С.И.Тертычный): типы перемычек.

Перемычки задаются двумя условиями: отображение потока поля (0.2) за время 2π тождественно, и $A \neq 0$ [4]. Основные результаты статьи - это следующие две теоремы.

Теорема 1. *В каждой зоне захвата все перемычки лежат на одной вертикальной прямой с абсциссой $B = \rho\omega$, где $\rho \in \mathbb{Z}$ – соответствующее ей число вращения.*

Теорема 1 подтверждает экспериментальный факт, обнаруженный С.И.Тертычным, В.А.Клепцыным, Д.А.Филимоновым и И.В.Щуровым, сформулированный в виде гипотезы в [4], где доказано, что абсциссы перемычек - целочисленные кратные ω.

Перемычка зоны захвата *положительна (отрицательна),* если ее некоторая проколотая окрестность на вертикальной прямой лежит строго внутри (снаружи) зоны захвата, и *нейтральна,* если ни одно из этих условий не выполнено. См. Рис. 2.

*Исследования А.А.Глуцюка поддержаны грантом РНФ 18-41-05003

Теорема 2. *Для любой частоты ω все перемычки зон захвата положительны.*

Теорема 2 подтверждает гипотезу из [5], где доказано, что нейтральных перемычек нет. Перемычки, либо имеющие абсциссу $B \neq \rho\omega$, либо неположительные, будем называть *призрачными.* Теоремы 1 и 2 утверждают, что *призрачных перемычек нет.*

Схема доказательства. (Полный текст – в https://arxiv.org/abs/2011.07839) Предположим противное: существует призрачная перемычка. Показано, что ее можно продеформировать в другую, со сколь угодно малой ω, сохраняя $\ell := \frac{B}{\omega} \in \mathbb{Z}$. Доказательство основано на эквивалентном описании модели (0.1) 3-параметрическим семейством линейных систем уравнений т.н. типа Джозефсона на сфере Римана (см. [3] и библ., а также [4, 5]). Исследуются их изомонодромные деформации в 4-мерном семействе т.н. систем типа Джимбо, описывающиеся решениями уравнений Пенлеве 3, см. [6]. Перемычки отвечают системам с тривиальной монодромией [4]. Показано, что системы Джозефсона отвечают простым полюсам решений уравнения Пенлеве 3 и образуют трансверсальное сечение к изомонодромным семействам. Это позволяет деформировать системы Джозефсона с тривиальной монодромией в аналогичные системы со сколь угодно малыми ω. Для каждого $\ell \in \mathbb{Z}$ отсутствие призрачных перемычек с $B/\omega = \ell$ при всех достаточно малых ω доказывается методами теории быстро-медленных систем.

Авторы благодарны В.М.Бухштаберу и Ю.С.Ильяшенко, привлекшим их внимание к задачам модели перехода Джозефсона, и им и М.Бертола, И.В.Вьюгину, В.И.Громаку, Э.Жису, М.Мацокко, В.Ю.Новокшенову, В.Н.Рубцову, И.В.Щурову за полезные обсуждения, и С.И.Тертычному за рисунок трёх типов перемычек.

Список литературы

[**1**] Арнольд, В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М., Наука, 1978. [**2**] Бухштабер, В.М.; Глуцюк, А.А., Тр. МИАН, **297** (2017), 62-104. [**3**] Бухштабер, В.М.; Карпов, О. В.; Тертычный, С.И. ТМФ, **162:2** (2010), 254-265. [**4**] Глуцюк, А.А.; Клепцын, В.А.; Филимонов, Д.А.; Щуров, И.В., Функц. анал. и его прил., **48:4** (2014), 47-64. [**5**] Glutsyuk A., J. Dyn. Contr. Syst. **25:3** (2019), 323-349. [**6**] Jimbo, M., Publ. RIMS, Kyoto Univ. **18:3** (1982), 1137-1161. [**7**] Josephson, B.D., Phys. Lett., **1:7** (1962), 251-253. [**8**] Klimenko, A.V; Romaskevich, O.L., Mosc. Math. J., **14:2** (2014), 367-384.

Ю.П.Бибило (Y.Bibilo).
Университет Торонто, Миссисога, Канада; ИППИ, Москва
E-mail: y.bibilo@gmail.com

А.А.Глуцюк (A.A.Glutsyuk).
CNRS, Франция (UMPA, ENS de Lyon; ISC J.-V.Poncelet);
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"
E-mail: aglutsyu@ens-lyon.fr