



**HAL**  
open science

# Une analyse de la conjecture de Syracuse : Démonstration

Mhammed Ettioutioui

► **To cite this version:**

Mhammed Ettioutioui. Une analyse de la conjecture de Syracuse : Démonstration. 2023. ensl-03966598v2

**HAL Id: ensl-03966598**

**<https://ens-lyon.hal.science/ensl-03966598v2>**

Preprint submitted on 5 Dec 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyses de la conjecture de Syracuse : Démonstration

Mhammed Ettioutioui

Soumis le 5 décembre 2023

## Abstract

We give in this paper an analysis of different properties of Syracuse sequence. And we give a proof of the Syracuse conjecture by considering the inverse sequence and modular studies.

## Résumé

Nous donnons dans cet article, nous étudions des différents aspects de la suite de Syracuse. Et nous donnons une démonstration de la conjecture de Syracuse en faisant appel à une suite inverse et en utilisant une représentation modulaire.

## 1 Introduction.

La suite de Syracuse est définie par :

$$S_0(p) = p \in \mathbb{N}$$

et

$$S_{n+1}(p) = \begin{cases} \frac{S_n(p)}{2} & \text{si } S_n(p) \text{ est pair} \\ 3S_n(p) + 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

L'itération de cette suite en partant d'une valeur initiale  $N$  semble aboutir à 1 après un nombre d'étapes, c'est le temps de vol. Ce fait constitue la conjecture de Syracuse qui peut se formuler de la manière suivante :

**Conjecture.** *Pour tout entier  $N$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $S_n(N) = 1$ .*

Elle a été étudiée de différentes manières. On renvoie à l'article de Luc-Olivier Pochon et Alain Favre [P-F] qui est très fourni et constitue une référence extrêmement complète sur les différentes pistes et avancées sur ce sujet. Lire aussi l'article de Jean-Paul Delahaye [D] tout aussi complet et qui contient des références et une histoire des différentes recherches.

On va considérer une formulation inverse en définissant les fonctions :

$$\begin{cases} f(n) = 2n \\ g(n) = \frac{n-1}{3} \end{cases} \quad \text{si } n \equiv 1[3] \quad (2)$$

On définit l'ensemble  $E_0$  formé de toutes les images de 1 par les itérations des applications  $f$  et  $g$  (quand c'est possible). Il est facile de voir l'équivalence suivante :

**Lemme.** Pour tout entier  $N$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $S_n(N) = 1$  est équivalent au fait que l'ensemble  $E_0$  soit égal à l'ensemble  $\mathbb{N}$ .

**Remarque.** La condition de parité ou non est remplacée par une condition sur l'application  $g$  moins contraignante.

On démontre :

**Théorème.** L'ensemble  $E_0$  est égale à  $\mathbb{N}$ .

Les études qui suivent ne servent pas qu'à démontrer la conjecture mais aussi à donner des propriétés pour comprendre le comportement des suites de compositions des fonctions  $f$  et  $g$  ainsi que de la suite de syracuse.

On représente le comportement de  $f$  et  $g$  sur des graphes modulo 9 qui permettent de voir des aspects qualitatives liés à ces fonctions.

## 2 Propriétés et résultats.

### 2.1 Analyse des fonctions $f$ et $g$ .

L'ensemble  $E_0$  est formé de tous les éléments qui sont les images itérées de 1 par les applications  $f$  et  $g$  lorsque c'est possible. On commence par un exemple :

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} 10 \xrightarrow{f} 20 \xrightarrow{f} 40 \xrightarrow{g} 13 \\ 13 \xrightarrow{f} 26 \xrightarrow{f} 52 \xrightarrow{g} 17 \xrightarrow{f} 34 \xrightarrow{g} 11 \xrightarrow{f} 22 \xrightarrow{g} 7.$$

Ceci peut être écrit sous la forme :

$$7 = g \circ f \circ g \circ f \circ g \circ f \circ f \circ g \circ f \circ f \circ f \circ g \circ f \circ f \circ f \circ f(1)$$

une suite de composition de  $f$  et  $g$ .

Un autre exemple de construction dans laquelle les chiffres entre parenthèses  $(i; j)$  désignent respectivement  $i$  la classe du nombre en base de quatre et  $j$  la classe du nombre en base de trois. Quand le nombre obtenue est un multiple de trois, la suite continue par multiplications successives par 2. On part du nombre 7.

$$\begin{array}{cccccccc} \begin{matrix} (3;1) \\ 7 \end{matrix} & \xrightarrow{f} & \begin{matrix} (2;2) \\ 14 \end{matrix} & \xrightarrow{f} & \begin{matrix} (0;1) \\ 28 \end{matrix} & \xrightarrow{f} & \begin{matrix} (0;2) \\ 56 \end{matrix} & \xrightarrow{f} & \begin{matrix} (0;1) \\ 112 \end{matrix} & \xrightarrow{f} & \begin{matrix} (0;2) \\ 224 \end{matrix} & \xrightarrow{f} & \begin{matrix} (0;1) \\ 448 \end{matrix} & \xrightarrow{f} & \begin{matrix} (0;2) \\ 896 \end{matrix} & \dots \\ & & & & \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow g & & & & & & & \\ & & & & \begin{matrix} (1;2) \\ 9 \end{matrix} & & \begin{matrix} (1;1) \\ 37 \end{matrix} & & \begin{matrix} (1;2) \\ 149 \end{matrix} & & & & & & & \\ & & & & & & \downarrow g & & & & & & & & & \\ & & & & & & \begin{matrix} (0;0) \\ 12 \end{matrix} & & & & & & & & & \end{array}$$

On dresse un tableau donnant les nombres de compositions des fonctions  $f$  et  $g$  en partant du nombre 5 et aboutissant à un nombre congru à 3 modulo 4 inférieur à 32 :

Nombre de composition par $f$	Nombre de composition par $g$	Arrivée
7	4	7
6	3	11
8	4	15
10	5	19
7	3	23
66	40	27
63	38	31

On donne ici une liste propriétés pour comprendre les fonctions  $f$  et  $g$  et permettre de visualiser la formulation inverse, l'ensemble  $E_0$  et la suite de Syracuse :

- $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^{(k)}(1) = 2^k \in E_0$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , si  $\llbracket 1; n \rrbracket \subset E_0$  alors  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\{2^k l \mid \forall l \in \llbracket 1; n \rrbracket\} \subset E_0$ .
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned}
g(4^k) &= \frac{4^k - 1}{3} \\
&= \frac{4^k - 1}{4 - 1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} 4^i \in E_0.
\end{aligned}$$

- Si  $k \in \mathbb{N}$ , alors on a :

$$g(4^k) \equiv k[3]$$

- Si  $p$  et  $q$  sont deux entiers, alors on a :

$$g(pq) = pg(q) + g(p).$$

- Si  $p$  est un entier, on considère sa décomposition en  $n$  facteurs premiers ( $n \geq 2$ ) :

$$p = \prod_{i=1}^n p_i$$

On a donc :

$$g(p) = \sum_{l=1}^n \left( \prod_{i=1}^l p_i \right) g(p_{l+1})$$

- Si  $n \equiv 1[3]$  et  $n \in E_0$ , alors on a :

$$g(4n) = n + g(n) \in E_0.$$

- Si  $n \equiv 2[3]$  et  $n \in E_0$ , alors on a :

$$g(8n) = 2n + g(2n) \in E_0.$$

- Si  $n \in E_0$  alors  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $f^{(k)}(n) = 2^k n \in E_0$  ( $f^{(k)}$  est la  $k^{\text{ème}}$  itération de  $f$  c'est-à-dre  $f^{(k)} = f \circ \dots \circ f$ )

10.  $\forall p$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\overbrace{\dots \circ g \circ g \circ g \circ \dots}^{p \text{ compositions de } g}(n) = \frac{1}{3^p} \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}$$

11.  $\forall p, q$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\overbrace{\dots \circ g \circ f \circ \dots \circ f \circ g \circ f \circ \dots}^{p \text{ compositions de } a \text{ et } q \text{ compositions de } b}(n) \leq \overbrace{f \circ \dots \circ f}^{p+q \text{ compositions de } f}(n)$$

12. Plus précisément  $\forall p, q$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $p \geq q$  on a :

$$\left\lfloor \frac{2^{p-1}}{3^q} \right\rfloor n \leq \overbrace{\dots \circ g \circ f \circ \dots \circ f \circ g \circ f \circ \dots}^{p \text{ compositions de } a \text{ et } q \text{ compositions de } b}(n) \leq \left\lceil \frac{2^p}{3^q} \right\rceil n$$

Dans ce cas les crochets désignent la partie entière du nombre.

13. Si  $n \in E_0$  et  $n \equiv 1[3]$ , alors  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} g(4^k n) &= \frac{4^k n - 1}{3} \\ &= \frac{4^k n - 4^k + 4^k - 1}{3} \\ &= 4^k g(n) + g(4^k) \in E_0. \end{aligned}$$

14. Si  $n \in E_0$  et  $n \equiv 2[3]$ , alors  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} g(2^{2k+1} n) &= \frac{2^{2k+1} n - 1}{3} \\ &= \frac{2^{2k+1} n - 2^{2k+1} + 2^{2k+1} - 1}{3} \\ &= 4^k g(2n) + g(4^k) \in E_0. \end{aligned}$$

15. Si  $n \in E_0$  et  $n$  est impair, alors  $g^{-1}(n) = 3n + 1$  appartient à  $E_0$ .

16. Si  $2n \in E_0$ , alors  $n$  appartient à  $E_0$  ou  $6n + 1$  appartient à  $E_0$ .

17. Un autre tableau permet d'avoir d'autres propriétés sur les comportement des fonctions  $a$  et  $b$ .

Pour  $m \in E_0$ , on a :

$m$	$\frac{4m-1}{3}$	modulo 3	modulo 4	modulo 6
1	1	1	1	1
4	5	2	1	5
7	9	0	1	3
10	13	1	1	1
13	17	2	1	5
16	21	0	1	3
19	25	1	1	1

Pour  $m \in E_0$  et  $m \equiv 4[9]$ ,

$$\frac{4m - 1}{3} \equiv 5[6].$$

De ces propriétés, on déduit le théorème suivante :

**Théorème.** *Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a :*

- si  $3k \in E_0$  alors  $4k \in E_0$
- si  $3k + 1 \in E_0$  alors  $4k + 1 \in E_0$
- si  $3k + 2 \in E_0$  alors  $2k + 1$  et  $4k + 2 \in E_0$

## Démonstration :

- Si  $3k \in E_0$  et en supposant que  $k$  est impair (sinon on divise par deux quitte à multiplier par deux à la fin), alors  $9k + 1 \in E_0$ . Donc  $36k + 4 \in E_0$  et par suite  $12k + 1 \in E_0$ , finalement  $4k \in E_0$ .
- Si  $3k + 1 \in E_0$  alors  $12k + 4 \in E_0$ . Donc  $4k + 1 \in E_0$ .
- Si  $3k + 2 \in E_0$  alors  $6k + 4 \in E_0$ . Donc  $2k + 1 \in E_0$  et  $4k + 2 \in E_0$ .  $\square$

## 2.2 Étude modulaire et représentation géométrique.

Cette partie est consacrée à une étude qui permet de voir des propriétés supplémentaires des applications  $f$  et  $g$ . Il s'agit de donner des pistes pour de nouvelles recherches.

On remarque que pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{4^{9k} - 1}{3} \equiv 0[9] \quad \text{et} \quad 4^{9k} \equiv 1[9]$$

Et pour tout entier  $\alpha \in \llbracket 0; 8 \rrbracket$ , on a :

$$\frac{4^{9k+\alpha} - 1}{3} = \frac{4^{9k+\alpha} - 4^{9k} + 4^{9k} - 1}{3} = 4^{9k} \frac{4^\alpha - 1}{3} + \frac{4^{9k} - 1}{3}.$$

Donc, on a le tableau suivant :

$\alpha$	$\frac{4^\alpha - 1}{3}$	$\frac{4^\alpha - 1}{3} \bmod 9 = \frac{4^{9k+\alpha} - 1}{3} \bmod 9$
0	0	0
1	1	1
2	5	5
3	21	3
4	85	4
5	341	8
6	1365	6
7	5461	7
8	21845	2

On distingue les cas suivants selon des valeurs de  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} 9 \times 3k + 1 &= 27k + 1 \xrightarrow{g} 9k \\ 9 \times 3k + 4 &= 27k + 4 \xrightarrow{g} 9k + 1 \\ 9 \times 3k + 7 &= 27k + 7 \xrightarrow{g} 9k + 2 \end{aligned}$$

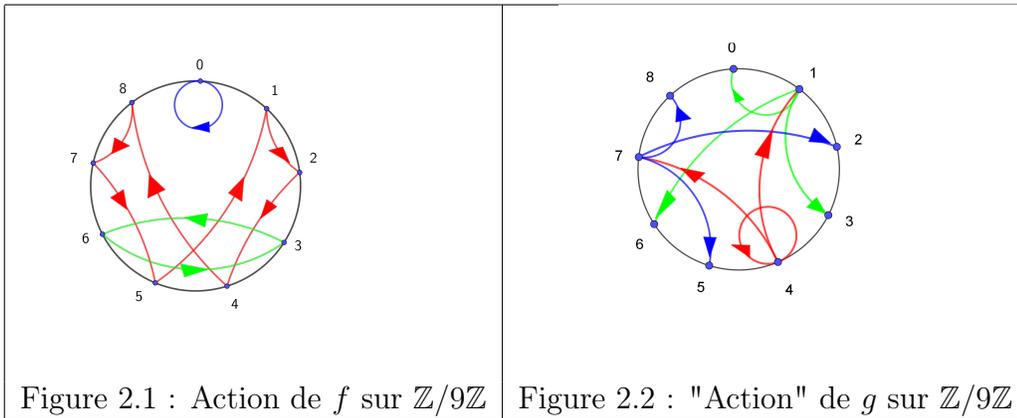
$$\begin{aligned} 9(3k + 1) + 1 &= 27k + 10 \xrightarrow{g} 9k + 3 \\ 9(3k + 1) + 4 &= 27k + 13 \xrightarrow{g} 9k + 4 \\ 9(3k + 1) + 7 &= 27k + 16 \xrightarrow{g} 9k + 5 \\ 9(3k + 2) + 1 &= 27k + 19 \xrightarrow{g} 9k + 6 \\ 9(3k + 2) + 4 &= 27k + 22 \xrightarrow{g} 9k + 7 \\ 9(3k + 2) + 7 &= 27k + 25 \xrightarrow{g} 9k + 8 \end{aligned}$$

Ces remarques conduisent à une étude modulo 9 (moins triviale que modulo 3) et à une représentation graphique de  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$  sur un cercle.

L'application  $f$  sur  $\mathbb{N}$  peut être associée à une transformation de  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$  qui a plusieurs cycles. Donc induit une action sur cet ensemble. L'application  $g$  n'est pas définie sur  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$  mais on peut construire des transformations qui lui correspondent.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \\ n &\longmapsto \dot{n} \end{aligned}$$

Les représentations de  $\varphi \circ f$  et  $\varphi \circ g$  sont données par les diagrammes des figures 2.1 et 2.2. (Nous n'allons pas écrire les expressions de ces éléments).

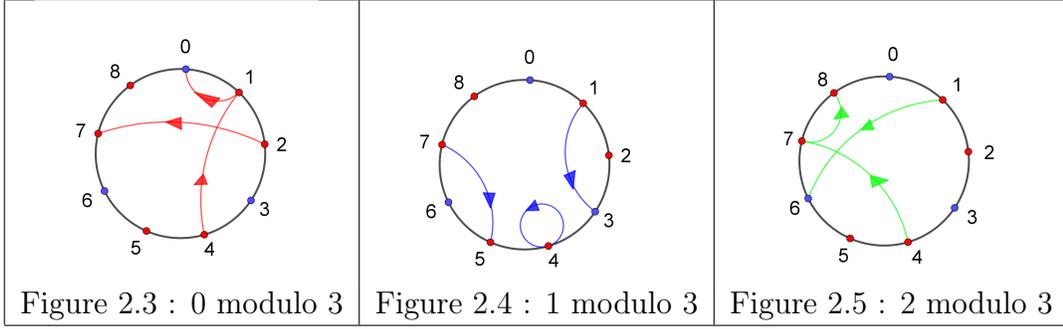


On a trois cycles qui correspondent aux parties de classes stables par l'action de  $a$  :

$$\begin{aligned} \dot{C}_0 &= \{\dot{0}\}, \\ \dot{C}_3 &= \{\dot{3}; \dot{6}\} \text{ et} \\ \dot{C}_1 &= \{\dot{1}; \dot{2}; \dot{4}; \dot{5}; \dot{7}; \dot{8}\}. \end{aligned}$$

Cette dernière partie est formée de tous les éléments inversibles dans  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ , donc c'est un groupe.

Si  $n \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$ , alors  $\dot{n} \in \dot{C}_1 = \{\dot{1}; \dot{2}; \dot{4}; \dot{5}; \dot{7}; \dot{8}\}$ .



**Lemme.** Pour tout entier  $n \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$ , il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $g(f^{(k)}(n)) \equiv 0[3]$ .

**Lemme.** Pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , il existe un entiers  $n \in E_0$  tel que  $g(n) = 3l$ .

On considère un entier  $l$ . L'équation :  $g(n) = 3l$  devient  $n = 9l + 1$ . l'entier  $n$  existe bien et il suffit de montrer qu'il est dans  $E_0$ . Le nombre  $n$  vérifie

$$n \notin 3\mathbb{N} \text{ et } n \equiv 1[9]$$

**Lemme.** L'image de  $E_0$  par l'application  $\varphi$  est égale à  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ .

### 2.3 Démonstration.

On suppose que  $E_0$  n'est égal à  $\mathbb{N}^*$  et on considère le complémentaire de  $E_0$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

$$\tilde{E} = \mathbb{N}^* \setminus E_0$$

Les ensembles  $E_0$  et  $\tilde{E}$  sont stables pour les applications  $f$  et  $g$  (pour les éléments dont l'image existe).

Si  $\tilde{E}$  n'est pas vide, alors il admet un plus petit élément  $\xi_0$ . On a :

$$\llbracket 1; \xi_0 - 1 \rrbracket \subset E_0$$

par définition de  $\xi_0$ .

On a les cas suivants :

- Si  $\xi_0 = 3k + 1$  , alors :

$$g(\xi_0) = \frac{\xi_0 - 1}{3} = k \in \tilde{E} \text{ et } k < \xi_0.$$

Donc  $\xi_0$  n'est pas le plus petit élément de  $\tilde{E}$ . Et  $\xi_0$  n'est pas congru à 1 mod 3.

- Si  $\xi_0 = 3k + 2$  , alors :

$$g(2\xi_0) = \frac{2\xi_0 - 1}{3} = 2k + 1 \in \tilde{E} \text{ et } 2k + 1 < \xi_0.$$

Donc  $\xi_0$  n'est pas le plus petit élément de  $\tilde{E}$ . Et  $\xi_0$  n'est pas congru à 1 mod 3.

- Si  $\xi_0 = 3k$ , alors il est impair car sinon sa moitié serait dans  $\tilde{E}$ . Donc en posant  $k = 2m + 1$ , on a :

$$\xi_0 = 6m + 3,$$

deux cas sont alors possibles :

1. Pour  $m = 2n$  donc  $\xi_0 = 12n + 3$ .

Il existe une suite  $(Z_p)_{(p \in \mathbb{Z})}$  qui dépend de  $\xi_0$  telle que :

$$\begin{cases} \dots g \circ f \circ \dots \circ f \dots (Z_p) = \xi_0 & \text{une composition de } f \text{ et } g \text{ un nombre } |p| \text{ fois, si } p \leq 0 \\ Z_p = 2^p \xi_0 & \text{si } p \geq 0 \end{cases}$$

Par hypothèse, la suite  $(Z_p)_{(p \in \mathbb{Z})}$  donne des termes plus grand que  $\xi_0$ . On peut construire de la même manière une suite parallèle  $(Z'_p)_{(p \in \mathbb{Z})}$  qui dépend de  $\xi'_0 = \xi_0 - 12 > 1$  telle que :

$$\begin{cases} \dots g \circ f \circ \dots \circ f \dots (Z'_p) = \xi'_0 & \text{une même composition de } f \text{ et } g, \\ & \text{un nombre } |p| \text{ fois que pour } Z_p, \text{ si } p \leq 0 \\ Z'_p = 2^p \xi'_0 & \text{si } p \geq 0 \end{cases}$$

Par construction, la suite  $(Z'_p)_{(p \in \mathbb{Z})}$  a les mêmes congruences que  $(Z_p)_{(p \in \mathbb{Z})}$ , donc elle admet comme minimum  $\xi'_0$ . Ces éléments sont alors dans  $\tilde{E}$  et de plus, pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$Z'_p < Z_p,$$

Le nombre  $\xi_0$  sous cette forme ne peut pas être le plus petit élément de  $\tilde{E}$ .

2. Pour  $m = 2n + 1$  donc  $\xi_0 = 12n + 9$  et posant  $l = 9n + 7$ , on a :

$$g(4l) = \frac{4l - 1}{3} = \frac{36n + 28 - 1}{3} = 12n + 9 = \xi_0$$

avec

$$l < \xi_0.$$

En conclusion, l'ensemble  $\tilde{E} = \emptyset$  et  $E_0 = \mathbb{N}^*$ .  $\square$

### 3 Éxtentions possibles.

- Trouver le nombre d'étape pour atteindre une hauteur donnée.
- Trouver l'altitude maximale.  
L'étude des propriétés des fonctions  $f$  et  $g$  peut donner une borne supérieure de l'altitude.
- Trouver le temps de vol.  
Ce nombre semble être lié à l'altitude maximale.
- On considère deux entiers  $p$  et  $q$  non nuls et premiers entre eux. La suite de nombres :

$$S_{n+1} = \begin{cases} \frac{S_n}{p} & \text{si } n \equiv 0[p] \\ qS_n + 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

La question est : « Que peut-on dire de cette suite suivant les couples  $(p; q)$  considérés ? »

Il semble que le théorème de Bésout intervient dans cette étude.

## 4 Annexes

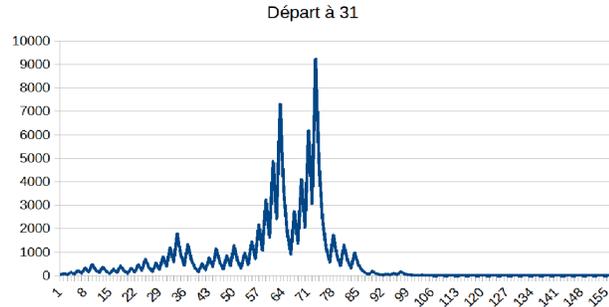
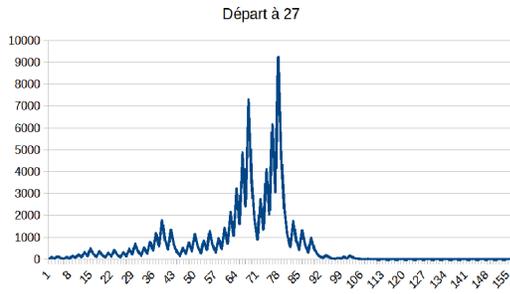
Dans ces annexes, on donne des calculs qui peuvent servir pour avancer sur la compréhension de la suite de Syracuse et voir certaines coïncidences à analyser.

1. On donne ce tableau de temps de vols et les nombres de compositions par  $f^{-1}$  et par  $g^{-1}$  (suite de Syracuse) :

	Les compositions par $f^{-1}$	Les compositions par $g^{-1}$	Temps de vol	Altitude
5	4	1	5	16
6	6	2	8	16
7	11	5	16	52
8	3	0	3	8
9	13	6	19	52
10	5	1	6	16
11	10	4	14	52
12	7	2	9	16
13	7	2	9	40
14	12	5	17	52
15	12	5	17	160
16	4	0	4	16
17	9	3	12	52
18	14	6	20	52
19	14	6	20	88
20	6	1	7	20
21	6	1	7	64
22	11	4	15	52
23	11	4	15	160
24	8	2	10	24
25	16	7	23	88
26	8	2	10	40
27	70	41	111	9232
28	13	5	18	52
29	13	5	18	88
30	13	5	18	160
31	67	39	106	9232
32	5	0	5	32

On remarque dans ce tableau des répétitions surprenantes qui poussent à analyser de plus près le comportement de la suite pour certains nombres consécutifs.

2. On remarque que les graphes des suites de Syracuse dont les nombres de départs sont 27 et 31 sont des translatés l'un de l'autre.



On voit que les deux graphes sont superposables avec un décalage. Et on peut montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$S_{n+5}(27) = S_n(31).$$

Puisque

$$27 \xrightarrow{g^{-1}} 82 \xrightarrow{f^{-1}} 41 \xrightarrow{g^{-1}} 124 \xrightarrow{f^{-1}} 62 \xrightarrow{f^{-1}} 31,$$

donc

$$S_5(27) = S_0(31) = 31.$$

Cette remarque ne concerne pas que ce couple de nombres et donne une idée sur d'autres manières de démontrer le théorème de Syracuse.

## References

- [P-F] Luc-Olivier Pochon et Alain Favre, La suite de Syracuse, un monde de conjectures, HALL open science, 22 Apr 2021.
- [D] Jean-Paul Delahaye, La tenace conjecture de Syracuse, POUR LA SCIENCE N° 529, 14 octobre 2021.