Une entrée dans l'algèbre par les programmes de calcul

Sophie Roubin
Professeure Collège Ampère Lyon, IFE

Sylvie Coppé
Université de Genève, FPSE, équipe DiMaGe

A l'origine de notre travail
Le groupe SESAMES
http://pegame.ens-lyon.fr/

- Recherche collaborative entre des chercheurs de l'UMR ICAR et des professeurs de mathématiques du secondaire

  SESAMES (Situations d'Enseignement Scientifique : Activités de Modélisation, d'Evaluation, de Simulation)

- LEA Ampère

COLLÈGE AMPÈRE, LYON (depuis 2011)

Ressources pour les enseignants et formateurs de mathématiques sur l'enseignement de l'algèbre au collège

UMR ICAR, équipe ADIS-Sciences

Thématique(s) Ifé : Profession et professionnalité éducative, Les ressources pour apprendre et faire apprendre

Production de ressources

http://pegame.ens-lyon.fr/

PEGAME

pour les Professeurs et leurs Elèves un Guide pour l'Apprentissage des Mathématiques et leur Enseignement

icar

mardi 18 avril 2017

Ce site est consacré à l'enseignement de l'algèbre au collège et en classe de seconde.

Les documents proposés sur ce site sont le fruit de plusieurs travaux de recherche

dirigés par Sylvie COPPE Maitresse de conférences IUFM, Université LYON 1,

auxquels participent des enseignants de collège et lycée.

Enseigner Se former

IFÉ - Une entrée possible dans l'algèbre par les programmes de calcul

Parcours mutualisé

ifé

SESAMES Algèbre

UMR ICAR
(Université Lyon, CNRS)

IFÉ - ENS LYON

- Christophe Alves
- Olivier Arrouch
- **Véronique Berger**
- Maud Chanudet
- **Anne Sophie Cherpin**
- Vincent Duval
- Stéphane Garapon
- **Alexandra Goislard**
- Sylvie Martin-Dametto
- **Claire Piolti-Lamorthe**
- **Sophie Roubin**
- **Etienne Spaak**

PLAN

- Historique du groupe SESAMES
  - 1 - Les premiers travaux
  - 2 - Les programmes de calcul
- La mise en TRAIN, une gestion de classe associée
- Des exemples de progression avec programmes de calcul
  - sur équations
  - sur preuve
- Programmes de calcul et évaluation par les pairs

Petit historique du groupe SESAMES algèbre (2002- …)

Constats de départ

- Les élèves ont des difficultés à mobiliser les outils algébriques au collège et au lycée dans les problèmes. Ils ont du mal à introduire une lettre dans un problème si on ne la leur donne pas.

- Les aspects modélisation et outil de preuve de l'algèbre sont peu mis en avant dans l'enseignement actuel de l'algèbre.

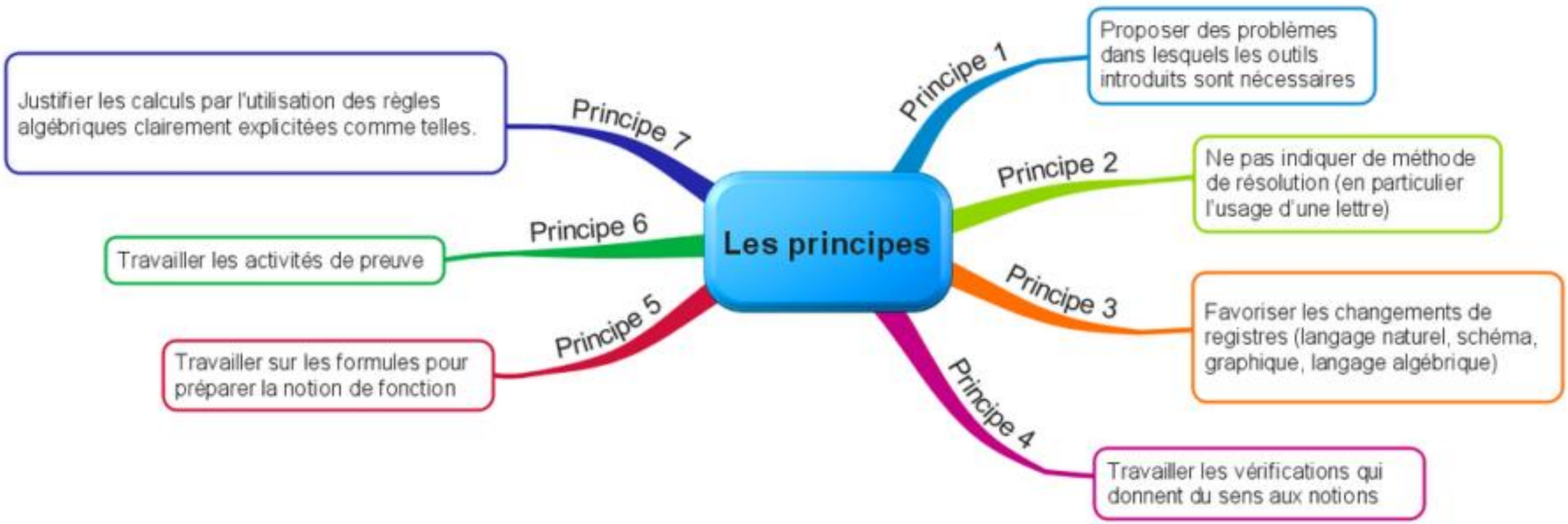
- L'algèbre est enseignée comme un objet plutôt qu'un outil.

- Beaucoup d'erreurs dans les calculs car la distributivité n'est pas utilisée comme élément technologique des techniques de calcul (Assude et al., 2012).

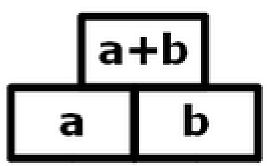
Des travaux sur l'introduction de la lettre, sur les difficultés en algèbre

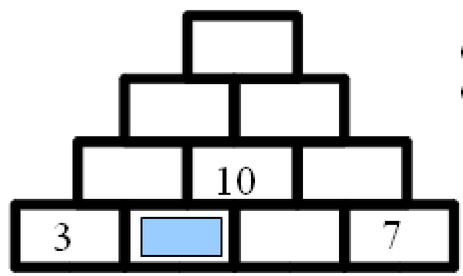
- **Behr** (1980) : difficultés
- **Kieran, Schmidt** : travaux sur l'algèbre élémentaire
- **Vergnaud** (1988, 1989) : entrée dans l'algèbre, procédures arithmétiques ou algébriques
- **Chevallard** (1989, 1990) : rupture /continuité entre algèbre et arithmétique
- **Drouhard** (1992) : algèbre comme langage
- **Gascon** (1993) : l'algèbre élémentaire n'est pas une arithmétique généralisée (paramètres)
- **Bednarz et Janvier** (1996) : problèmes connectés/déconnectés
- **Combier et al.** (1996). Les débuts de l'algèbre au collège.

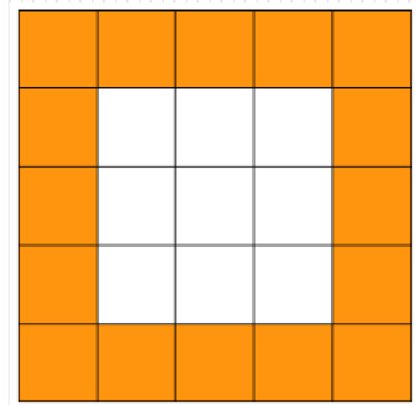
7 principes qui nous guident dans l'élaboration des activités



PREMIÈRE ÉTAPE

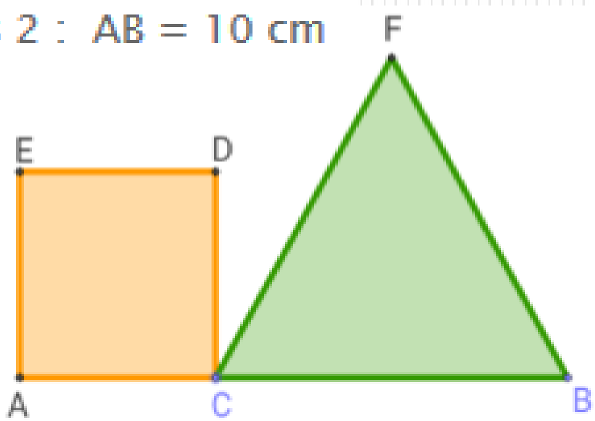






Cas 1 : AB = 21 cm

Cas 2 : AB = 10 cm



Proposer des activités innovantes mais ***isolées***

- Rendre les problèmes plus ouverts
  (trop d'exercices guidés dans les manuels)
- Laisser l'introduction de la lettre à la charge des élèves plutôt que de la donner
- Mettre les élèves en activité,
  plus autonomes vis à vis du savoir
- Justifier les techniques de calcul
  (place de la distributivité)
- Changer les pratiques de classe
  (production de documents dans « Se former »)

Bilan

- Forte influence de la TSD, création d’un milieu riche pour l’élève
- Des difficultés à trouver des activités qui nécessitent vraiment la lettre
- Articulations sens/technique
- Nécessité d’inscrire ces activités dans une progression (avant, après)

Difficultés de diffusion

- Difficultés à implanter ces activités dans les classes ordinaires (Coulange et Grugeon, 2008 ; Mangiante, 2014 ; Perrin Glorian, 2014)
- Les documents officiels ne favorisent pas plus cette appropriation (Coppé et Grugeon, 2014)
  - atomisation de l'algèbre (Assude et al., 2012)
  - activités isolées au statut mal défini
  - pas d'indications sur la gestion de classe.

Trois évolutions conjointes (2008…)

(1) Les travaux de recherche sur les pratiques professionnelles

- Chevallard TAD (1998…), les AER, PER

- Robert (2001) Butlen, Vergnes, Roditi

« Tout n’est pas possible pour l’enseignant »

(2) Les travaux de recherche sur l’algèbre

Les entrées qui donnent des finalités au calcul littéral, des organisations mathématiques

- Les équations : entrée progressive en 5e avec procédures non expertes (lettre comme inconnue)
- Les activités de preuve, de généralisation (lettre comme variable)
- La modélisation (en 3e avec les fonctions)

Grugeon (1995), Bosch (2005), Kieran (2007), Ruiz Monzon (2010), Pilet (2012)

(3) Les pratiques des professeurs du groupe SESAMES

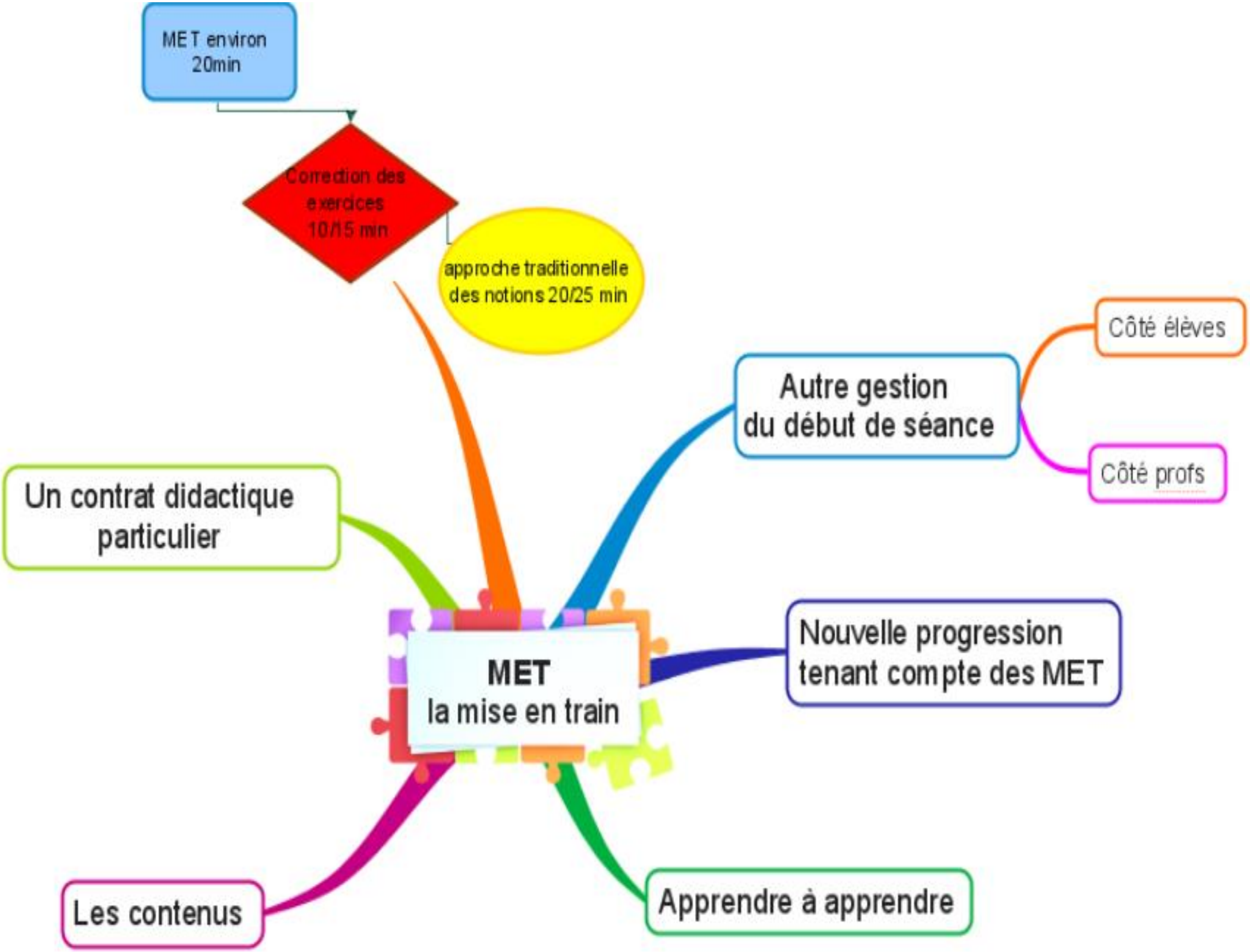
- Des évolutions de programmes sur l'algèbre
- Une injonction des programmes et une innovation : le calcul mental ou calcul rituel

Vers les mises en train
et l'utilisation des programmes de calcul
(Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. & Roubin S., 2013 ; Alves et al., 2013)

La mise en TRAIN,
une gestion de classe innovante

Une aide à la mise en œuvre pour changer la temporalité, le temps de mise en TRAIN

TRAIN : Travail de Recherche ou d'Approfondissement avec prise d'INitiative


MET environ 20min
Correction des exercices 10/15 min
approche traditionnelle des notions 20/25 min
Autre gestion du début de séance
Côté élèves
Côté profs
Un contrat didactique particulier
MET
la mise en train
Nouvelle progression tenant compte des MET
Les contenus
Apprendre à apprendre

ETAPE 2 : Les programmes de calcul

« Lorsque la notion d'expression algébrique est dûment introduite au collège comme mathématisant la notion de programme de calcul, un certain nombre de difficultés « traditionnelles » prennent un tout autre sens, quand elles ne disparaissent pas tout à fait. »

Chevallard, 2007
(cours aux professeurs stagiaires)

Ressource d'accompagnement du programme 2016 de cycle 4 : **Utiliser le calcul littéral**

Au titre de l'entrée dans l'algèbre, l'enseignement du calcul littéral au cycle 4 vise les objectifs suivants :

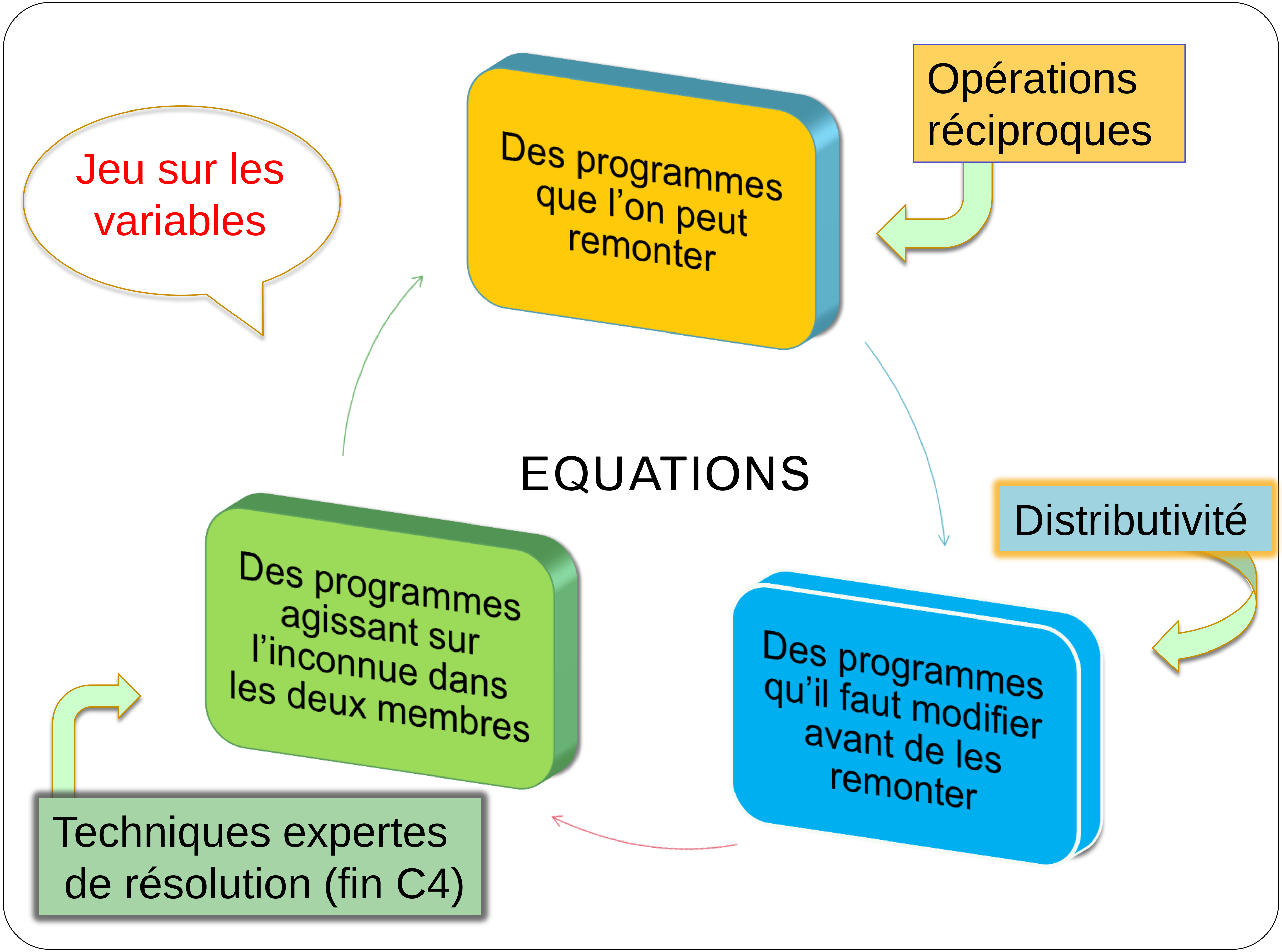
- traduire le résultat de la suite des opérations d'un programme de calcul sous la forme d'une expression littérale et établir le lien entre l'aspect « procédural » et l'aspect « structural » de cette expression : ainsi, le résultat du programme de calcul « multiplier un nombre par 2 et ajouter 3 au résultat » se traduit par l'expression $2x + 3$ dont la structure est celle de la somme de 3 et du double de x ;
- décrire une propriété générale de nombres (par exemple « être la somme de deux entiers consécutifs » ou « être un multiple de 3 ») ;
- démontrer qu'une propriété est vraie dans un cadre général (par exemple les règles du calcul fractionnaire) ;
- modéliser et résoudre des problèmes à l'aide d'équations ou d'inéquations du premier degré ;
- introduire les concepts de variable et de fonction.


Les programmes de calcul
Pour aller vers la résolution d'équation
en 6ème
pour travailler la réversibilité des opérations
en lien avec les opérations à trous
en 5ème
des programmes que l'on peut remonter en utilisant l'opération «réciproque» de chaque opération
puis des programmes que l'on ne peut pas remonter et qu'il est utile de modifier en utilisant la distributivité
en 4ème
des programmes de calculs agissant sur l'inconnue dans les deux membres
jouer sur les variables didactiques pour décourager le tâtonnement (solutions négatives, décimales, rationnelles)
Pour aller vers la preuve
mettre en valeur une démarche de recherche : essais, conjecture, preuve
question de l'équivalence de deux programmes
un contre exemple suffit pour prouver qu'une conjecture est fausse
nécessité du passage au calcul littéral pour prouver une affirmation sur une infinité de valeurs
prouver des propriétés arithmétiques

A quelles conditions deux programmes de calcul donnent- ils toujours le même résultat ?

- Pour aller vers la résolution d'équations
- Pour aller vers la preuve

Un exemple de progression avec programmes de calcul sur équations


Jeu sur les variables
Des programmes que l'on peut remonter
Opérations réciproques
EQUATIONS
Distributivité
Des programmes agissant sur l'inconnue dans les deux membres
Des programmes qu'il faut modifier avant de les remonter
Techniques expertes de résolution (fin C4)

Des programmes que l'on peut remonter

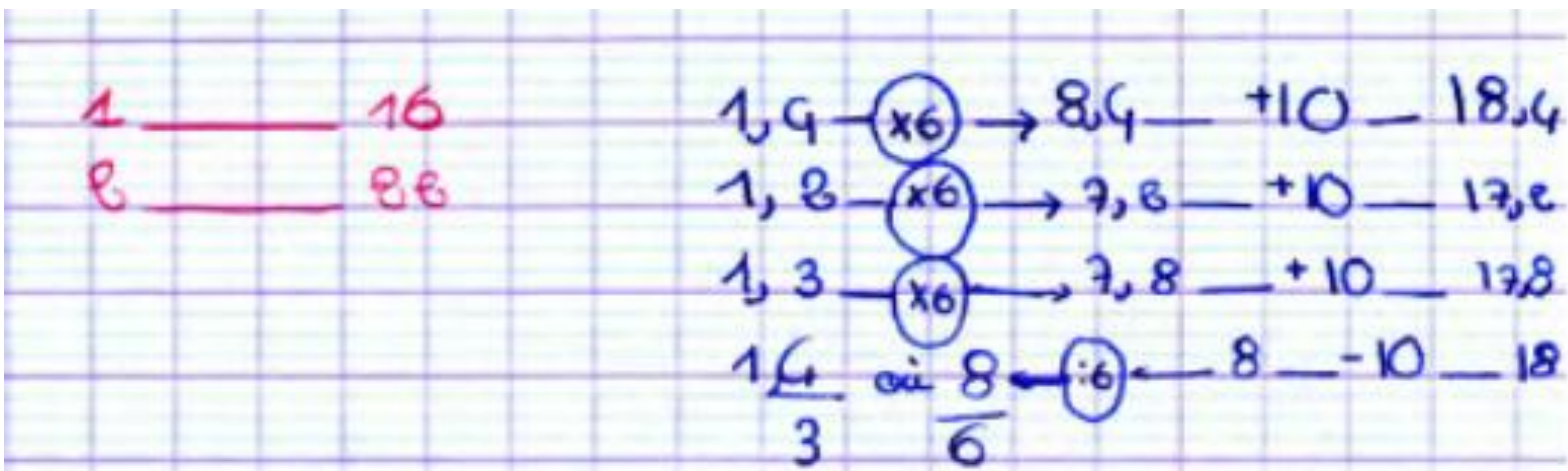
Opérations réciproques

Je pense à un nombre

Je le multiplie par 6

J'ajoute 10 au résultat

Quel nombre faut il choisir pour obtenir 18 ?



Je choisis un nombre

Je lui ajoute 3

Je multiplie le résultat par 5

J'enlève au résultat le nombre du départ

Distributivité

Des programmes qu'il faut modifier avant de les remonter

Quel nombre ai-je choisi si j'obtiens 25 ?

$$\ldots \xrightarrow{+3} \ldots \xrightarrow{\times 5} \ldots \xrightarrow{-\ \ldots} 25$$

x est n'importe quel nombre

$$(x+3)\times 5 - x$$
$$= x\times 5 + 3\times 5 - x$$
$$= x\times 5 + 15 - x$$
$$= 5x + 15 - x$$
$$= 4x + 15$$

$$\ldots \xrightarrow{\times 4} \ldots \xrightarrow{+15} \ldots$$

$$25 \xrightarrow{-15} 10 \xrightarrow{:4} 2{,}5$$

$$2{,}5 \xrightarrow{+3} 5{,}5 \xrightarrow{\times 5} 27{,}5 \xrightarrow{-2{,}5} \boxed{25}$$

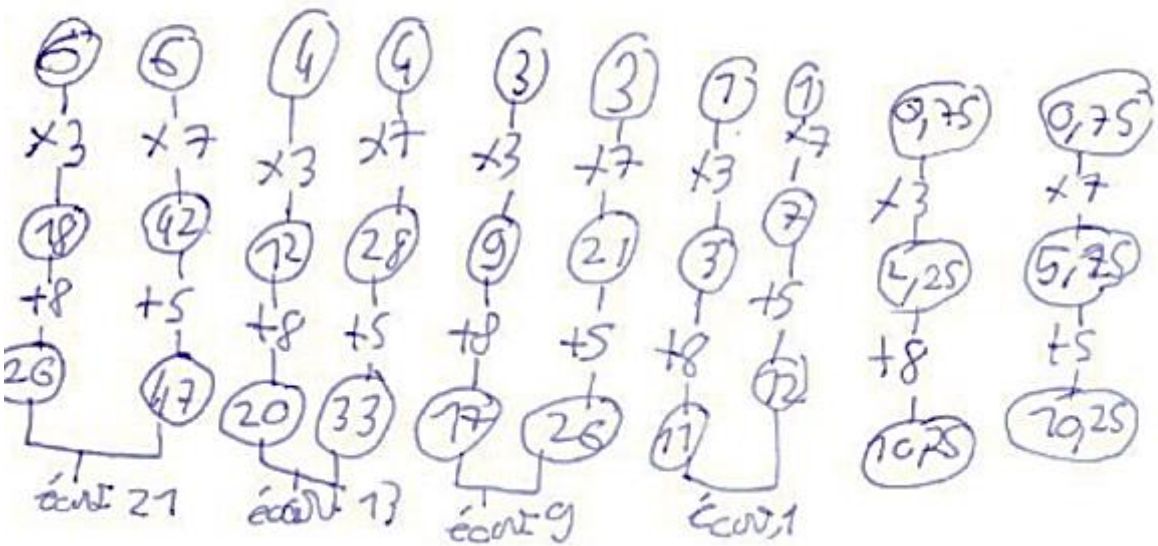
DiMaGe

Je choisis un nombre, je le multiplie par 3
et j'ajoute 8 au résultat.
Je trouve le même résultat que lorsque
je le multiplie par 7 et que j'ajoute 5 au résultat.

Quel nombre ai-je choisi ?

Des programmes agissant sur l'inconnue dans les deux membres

Techniques expertes de résolution (fin C4)



Conjecture : je pense que quand on augmente le chiffre recherché de 1 l'écart augmente de 4

$$x\times 3+8=x\times 7+5$$

$$3x+8=7x+5$$

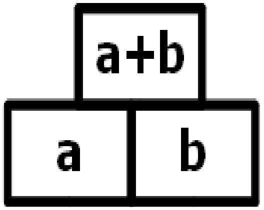
$$-3x \qquad -3x$$

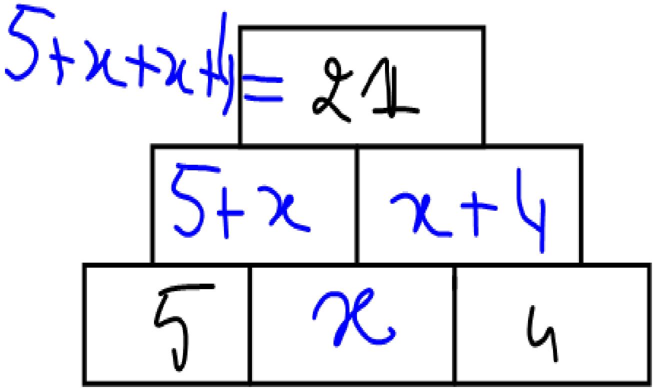
$$8=4x+5$$

$$-5 \qquad -5$$

$$3=4x=\frac{3}{4}=0,75$$

MET : Les pyramides





Je cherche le nombre central en bas Je l'appelle x

Je cherche x parce que

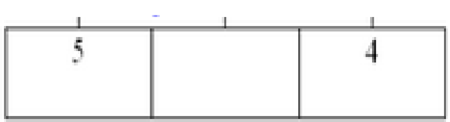
$$5+x+x+4=21$$

$$9+2x=21$$

c'est un programme de calcul ?

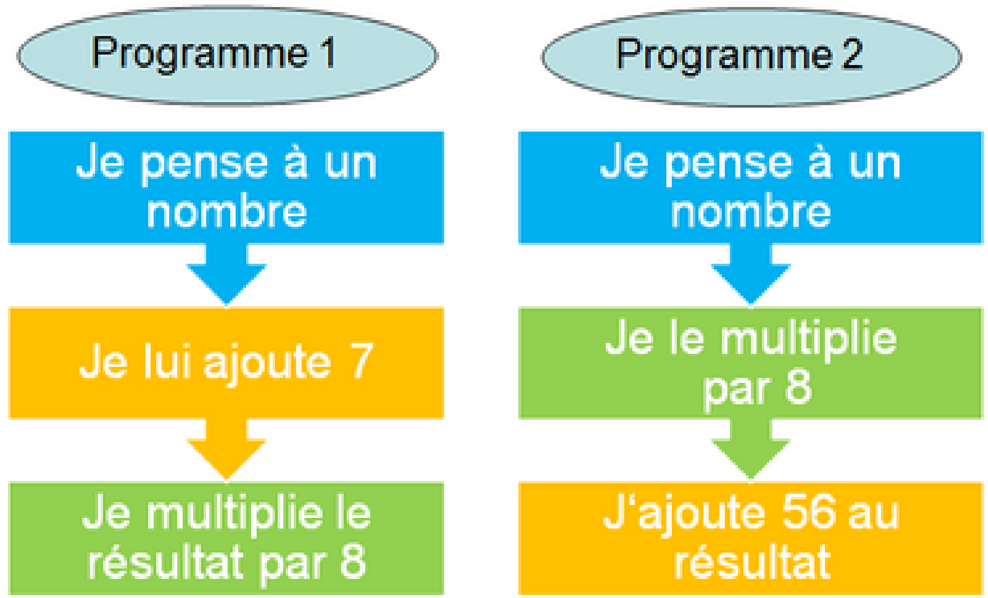
$$x \rightarrow (\times 2) \rightarrow \ \rightarrow (+9) \rightarrow 21$$

$$6 \leftarrow (:2) \leftarrow 12 \leftarrow (-9) \leftarrow$$



Programme de calcul et preuve


Essais
Conjecture
Preuve
(pour expliquer)
La lettre pour une infinité de valeurs
Utilisation des propriétés algébriques (distributivité)
Contre exemple
Procédural et structural
VERS LA PREUVE



- Fais des essais en choisissant le même nombre pour les deux programmes.
- Que remarques tu ?
- Ta remarque est-elle vraie pour n'importe quel nombre ?

Choisir un nombre
le multiplier par 5
ajouter 6 au produit
multiplier le résultat obtenu par 2
enlever 10 fois le nombre de départ.

Je choisi 2 ; Je choisi 3 ; Je choisi 5

$2 \times 5 = 10$	$3 \times 5 = 15$	$5 \times 5 = 25$
$10 + 6 = 16$	$15 + 6 = 21$	$25 + 6 = 31$
$16 \times 2 = 32$	$21 \times 2 = 42$	$31 \times 2 = 62$
$32 - 20 = 12$	$42 - 30 = 12$	$62 - 50 = 12$

On constate que pour tout nombre choisi le resultat sera 12 si on le fait avec ce progra

Je choisi x

$x \times 5 = 5x$

$5x + 6 = 5x + 6$

$(5x + 6) \times 2 = 10x + 12$

$10x + 12 - 10x$

$= 12$

On a reussi a demontré donc le programme est justifi

Je choisis un nombre,

je lui ajoute 1,

je calcule le carré du résultat,

je retranche le carré du nombre de départ.

Pour tout entier n

$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$

Des formulations diverses

- J’obtiens toujours deux fois le nombre plus 1
- J’obtiens toujours la somme de ces deux nombres
- La différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est toujours un nombre impair
- Tout entier impair peut s’écrire comme la différence des carrés de deux nombres consécutifs.

Conclusions : Intérêts des PC

- Outil facile à utiliser car texte simple
- Progression dans les objectifs et la difficulté en jouant sur les variables (nombres en jeu, formes des programmes, procédures personnelles/expertes)
- Travail dans différents registres de représentation
- Travail sur les aspects structural et procédural
- Dialectique sens /technique
- Gestion de classe privilégiant les apprentissages sur la durée (dévolution/institutionnalisations/réinvestissements)

Programme de calcul et évaluation par les pairs

Projet Européen ASSIST ME
ICAR Lyon, LSE Grenoble

ASSISTME

- Dégager des critères du fonctionnement et de l'utilisation de l'Evaluation Formative en classe
  - en lien avec l'Évaluation Sommative,
  - dans le cadre des démarches d'investigation en sciences et de la résolution de problèmes en mathématiques
- et ainsi pouvoir proposer (en conformité avec la culture de chaque pays et des pratiques) :
  - des méthodes d'évaluations
  - des formations aux enseignants

Site : http://assistme.ku.dk
Recommandations pour la France sur le site :
https://assistmefr2016.sciencesconf.org/ (rubrique actualités)

Évaluation par les pairs

- Allal (1989) : Importance pour les élèves de développer des compétences leur permettant de se positionner par rapport à leur travail ou par rapport aux réponses des autres dans un but de régulation
  - accroissement de l'autonomie de l'élève
  - meilleure adaptation au monde.
- Black et al. (2004) : Différentes organisations possibles, le principe étant que les élèves soient placés en position de réfléchir sur la validité de la production (orale ou écrite) d'au moins un de leurs camarades.

Un problème simple, dans le cadre de la progression de la classe

Question 1 : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Ajouter 4
- Multiplier la somme par 5
- Soustraire 8 au résultat

Quelle expression littérale décrit ce programme de calcul ?

2 Modalités de travail

- Chaque élève résout, échange sa copie avec voisin qui se prononce sur la réponse et retour

ou

- Prof choisit 4 réponses, les élèves votent sur chacune

- Débat
- Nouveau positionnement

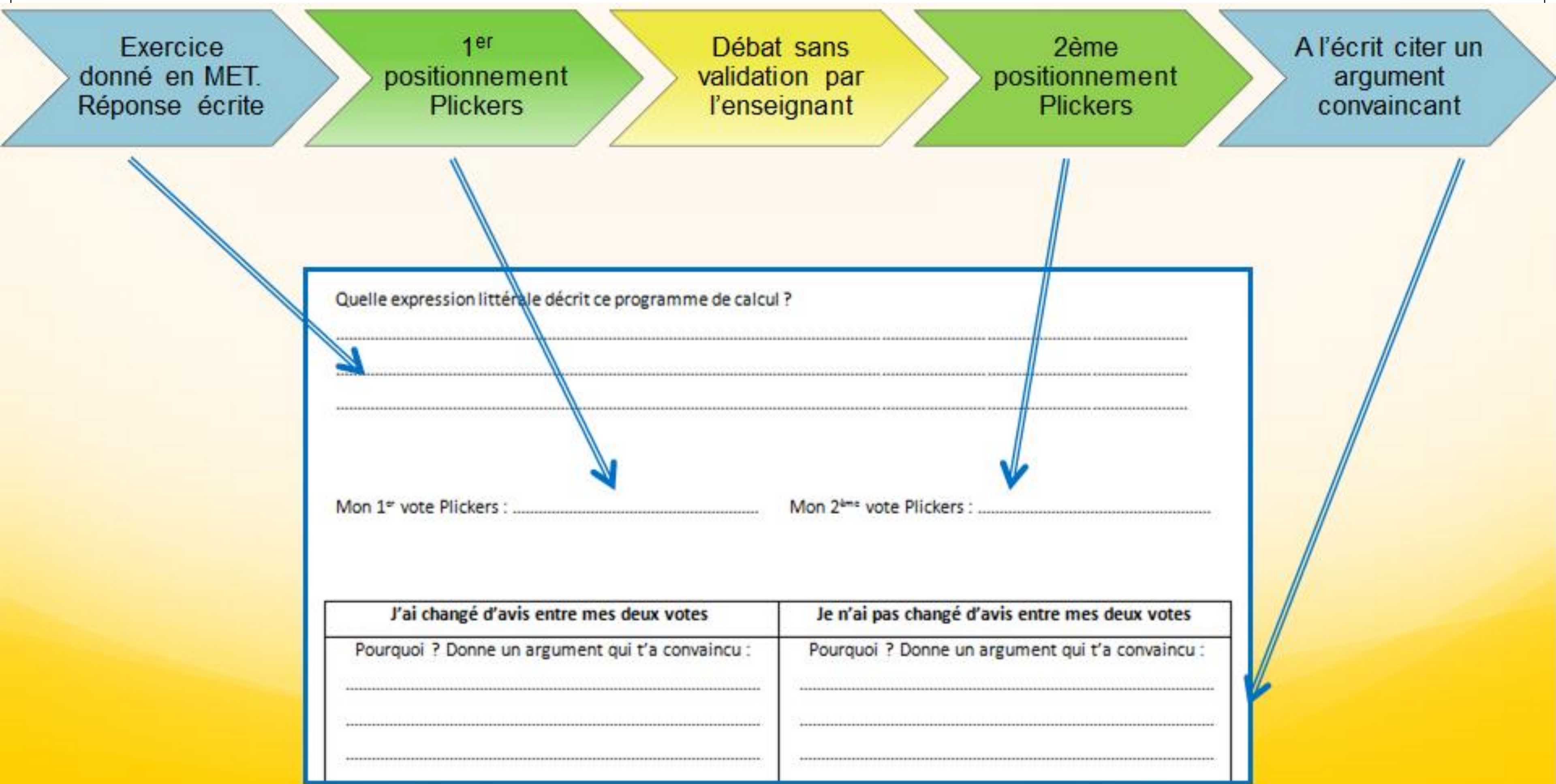
Analyse a priori des réponses

Réponses correctes	Réponses erronées
• réponse correcte développée 5 (x+4) – 8	• un calcul exemple
• réponse correcte réduite 5x+12	• plusieurs calculs exemples
	• un schéma de programme en ligne ou colonne
	• pas prise en compte des parenthèses • 5x + 4 - 8
	• pas prise en compte des parenthèses • 5x +/- 4
	• erreur dans la réduction 5x +/- 12

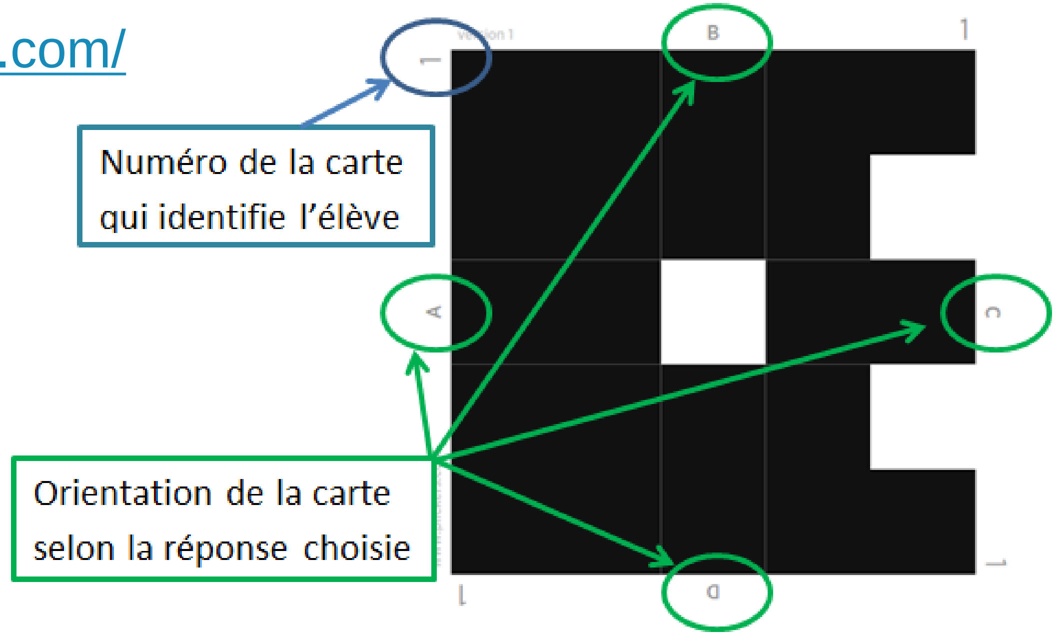
Validation des réponses

Réponses	Validation	Invalidation
Réponse correcte développée 5 (x+4) – 8	***Externe*** Même réponse Il y a des lettres ***Interne*** Refaire le programme Il faut mettre les parenthèses	***Externe*** Pas même réponse (car pas réduite) ***Interne*** Pas terminé car pas réduite
Réponse correcte réduite 5x+12	***Externe*** Même réponse Il y a des lettres ***Interne*** Refaire le programme et le réduire Vérifier la réduction	***Externe*** Pas même réponse (car réduite) ***Interne*** Développement avec erreur de calcul

Le protocole en 4e (2 classes) et 3e (3 classes)



https://plickers.com/



- Les élèves répondent simultanément à une même question.
- Ils ne sont pas influencés par les réponses des autres.
- Les résultats sont consultables instantanément

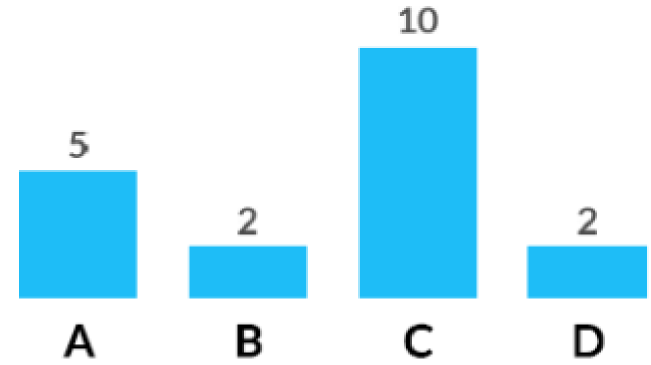
Rituels 2 : Les programmes de calculs

Total: 19/21

Séance 8 : D'une écriture à l'autre

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Ajouter 4
- Multiplier la somme par 5
- Soustraire 8 au résultat



Quelle expression littérale décrit ce programme de calcul ?

Classe de 4ème (REP+)
Problème donné en mise en train (MET)
½ h en début d'heure

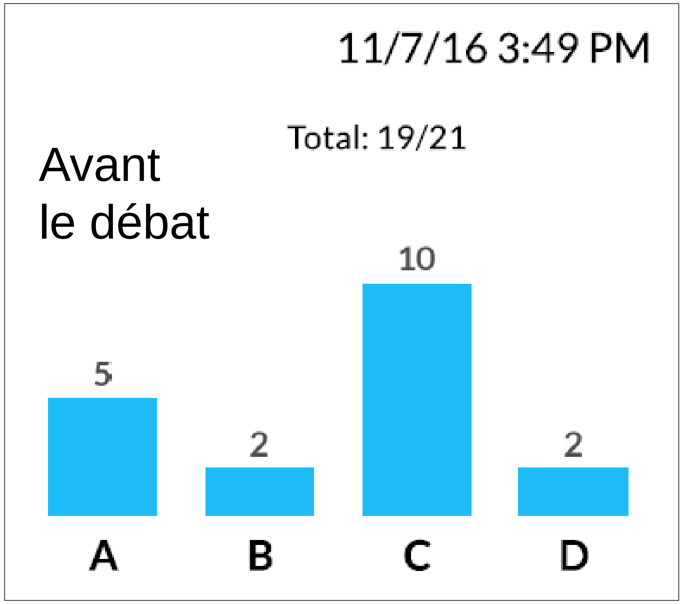
Vidéo de l'expérimentation – 9 min

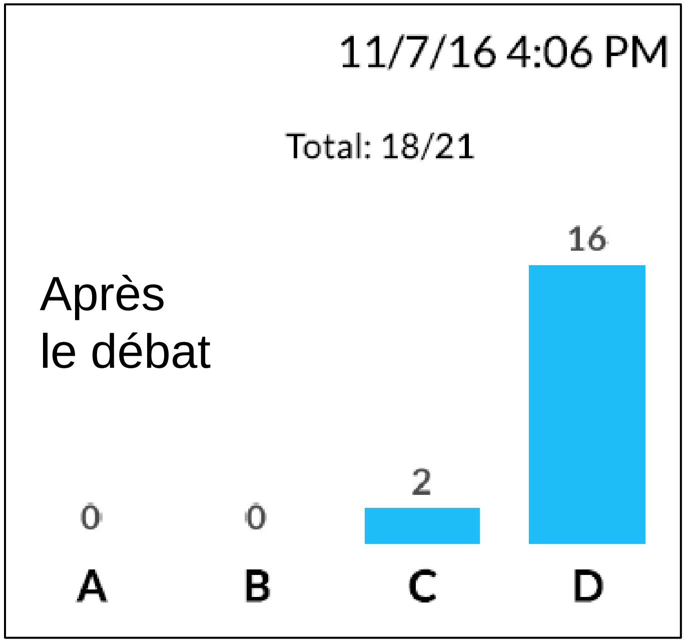
Objets de discussion pendant le débat

- Des objets de savoir anciens explicitement enseignés
  - relatifs (multiplication)
  - Priorités opératoires (parenthèses)
- Des objets paramathématiques
  - Signe égal (« il doit avoir la même chose de chaque côté du signe = »)
  - Lettre (« on n'est pas obligé de mettre x, on peut mettre une autre lettre »)
- Des besoins d'apprentissage implicites (Castela, 2008 ; Pilet, 2012)
  - « est ce que les priorités opératoires existent en calcul littéral ? »
  - « n nombre choisi ne peut pas être égal à n+4, rester sur le nombre de départ »
  - « 5x c'est 5 fois x ou 5 plus x »
- Des questions posées par des élèves

Résultats

classe	réponses
P1 4^e A REP+	**A** 22+4 =26 26 x5 =130 130- 8 = 122
Film	**B** n + 4 = n n x 5 - 8 = n
	C n+4 x 5- 8
	D 4+ 5 = 9 x 5 = 45 - 8 = 37 remplacée ensuite par (*n*+4) x 5 - 8





Réponses perso/contrôle

P1 4e A et 4e B REP+ Réponses	Avant débat	En contrôle
réponse correcte développée 5 (x+4) – 8	14	9
réponse correcte réduite 5x+12	0	0
un calcul exemple	12	5
plusieurs calculs exemple		
pas prise en compte des parenthèses 5x+4 -8	7	19
pas prise en compte des parenthèses 5x +/-4		
erreur dans la réduction 5x +/-12	1	0
plusieurs variables	2	2
Pas de réponse	4	5

Conclusions

- Une activité simple, sans finalité, courte, de réinvestissement (basique à ces niveaux de 4^{e} et 3^{e})
- Pas simple pour les élèves qui utilisent encore des procédures erronées (égalités enchainées, calculs et peu de réduction)
- Richesse des arguments personnels
- Richesse des arguments dans le débat
- Des différences dues aux modalités (notamment montrer les votes a un effet sur les réponses)

Des outils à proposer dans les classes qui correspondent aux critères de l'EF

- L'exigence d'argumentation fait travailler d'autres connaissances que celles mobilisées pour résoudre (milieu)
- Une modification du contrat (argumenter sur les réponses)
- Influence de la nature de la tâche : sur n'importe quelle tâche ?
- Arguments différenciés suivant le niveau des élèves
- Nécessité d'une étude fine élève par élève

Articles

- Alves, C., Coppé, S., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. & Roubin, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, *92* (numéro spécial Algèbre), 9-30.

- Coppé, S. & Moulin, M. (à paraître). Évaluation entre pairs et débat argumenté dans le cadre d'un problème complexe en mathématiques. Canadian journal of sciences, mathematics and technology education.

- Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. & Roubin S. (2013). TRAIN : Travail de Recherche ou d'Approfondissement avec prise d'Initiative, Bulletin de l'APMEP, 502.

- Piolti Lamorthe, C. & Roubin, S. (2010). Le calcul réfléchi : entre sens et technique. Bulletin de l'APMEP, n°488.

Merci de votre attention