



HAL
open science

Production de ressources pour l'enseignement de l'algèbre au collège : le LÉA réseau d'écoles et collèges Ampère

Anne-Sophie Cherpin, Sylvie Coppe, Alexandra Goislard, Claire Piolti
Lamorthe, Sophie Roubin

► To cite this version:

Anne-Sophie Cherpin, Sylvie Coppe, Alexandra Goislard, Claire Piolti Lamorthe, Sophie Roubin. Production de ressources pour l'enseignement de l'algèbre au collège : le LÉA réseau d'écoles et collèges Ampère. Catherine Loisy; Réjane Monod-Ansaldi; Brigitte Gruson. Le réseau des lieux d'éducation associés à l'Institut français de l'éducation : Un instrument pour la recherche, Presses Universitaires de Rennes, pp.183-201, 2022, Paideia, 978-2-7535-8679-6. ensl-04112334

HAL Id: ensl-04112334

<https://ens-lyon.hal.science/ensl-04112334>

Submitted on 31 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Production de ressources pour l'enseignement de l'algèbre au collège :
le LéA réseau d'écoles et collèges Ampère

Anne Sophie Cherpin, professeure de mathématiques,
Collège Pierre Valdo Vaulx en Velin
Sylvie Coppé, maitresse d'enseignement et de recherche, correspondante IFÉ
Université de Genève, Équipe DiMaGe,
Alexandra Goislard, professeure de mathématiques
Collège Jacques Duclos Vaulx en Velin
Claire Piolti Lamorthe, professeure de mathématiques, correspondante LéA
Collège Raoul Dufy Lyon
Sophie Roubin, professeure de mathématiques, correspondante LéA,
Collège Ampère Lyon - IFÉ

Le groupe de recherche SESAMES Algèbre¹ a été créé en 2002 au sein du laboratoire ICAR² (CNRS, Université de Lyon, ENS Lyon) dans la tradition des travaux faits en sciences physiques (Tiberghien et al., 2009). Dès sa création, il a été soutenu par l'IFÉ³. C'est donc de façon assez naturelle que nous avons intégré, en 2011, le dispositif du réseau des LéA en association avec le collège Ampère de Lyon (en raison de la présence de deux enseignantes dans cet établissement) pour la recherche « Ressources pour les enseignants et formateurs de mathématiques sur l'enseignement de l'algèbre au collège ». Le fait d'être associé à un établissement plutôt qu'à un groupe d'enseignant.e.s a alors amené des enrichissements de notre fonctionnement notamment par une plus grande proximité avec l'établissement (réunion annuelle avec l'ensemble des enseignant.e.s du collège, organisation de formations au sein de l'établissement, etc).

Depuis l'origine du projet, l'objectif du travail est la construction collaborative, par des professeur.e.s de mathématiques et une chercheuse de l'UMR ICAR, de ressources pour les enseignant.e.s et les formateur.trice.s sur l'enseignement de l'algèbre au collège en France, et notamment sur les débuts de l'algèbre. En partant du constat que l'enseignement de l'algèbre au collège (élèves de 11-15 ans) reste trop centré sur des techniques plutôt que sur le sens, que les justifications des calculs restent trop peu explicites sur la propriété utilisée, la finalité de ce groupe de travail est de produire des ressources favorisant l'activité mathématique des élèves et leur responsabilité face aux apprentissages. Les documents produits sont diffusés sur le site PEGAME (<http://pegame.ens-lyon.fr/>).

Dans ce texte, en décrivant et analysant le fonctionnement du groupe SESAMES et du LéA réseau d'écoles et collèges Ampère, nous souhaitons montrer comment des savoirs de différents types ont pu être partagés et/ou construits et notamment comment les pratiques de chacun.e ont évolué. C'est ainsi que notre texte contribue à la thématique « savoirs et ressources pour la formation et le développement professionnel ».

Avant cela, dans une première partie, nous analyserons le type de collaboration, puis, dans une deuxième, nous indiquerons rapidement des éléments théoriques en didactique de l'algèbre sur lesquels se base notre travail. Pour terminer, nous mettrons en lumière quelques effets de la participation à ce groupe sur les pratiques des enseignant.e.s et sur celles de la chercheuse.

La recherche collaborative comme type de collaboration dans le LéA réseau d'écoles et collèges Ampère

Comme nous l'avons dit ci-dessus, la finalité première du groupe de travail SESAMES Algèbre et du LéA réseau d'écoles et collèges Ampère est de produire des ressources pour les enseignant.e.s et les formateur.trice.s (c'est le contrat passé avec les enseignant.e.s) par un

travail de co-construction où chacun apporte son expertise (même naissante) dans son domaine. En ce sens, nous nous situons dans le modèle de recherche collaborative entre chercheur.se.s et enseignant.e.s selon (Desgagné, 1997) qui définit trois critères :

La recherche collaborative suppose la coconstruction d'un objet de connaissance entre un chercheur et des praticiens. (...)

La recherche collaborative allie à la fois activités de production de connaissances et de développement professionnel. (...)

La recherche collaborative vise une médiation entre communauté de recherche et communauté de pratique. (Desgagné, 1997, pp. 383-384)

Nous partageons la position de Bednarz (2013) qui souligne la nécessité de prendre en compte les contextes d'enseignement pour que les activités produites puissent être intégrées dans les pratiques « ordinaires ».

Il ne s'agit donc pas seulement, pour nous, de développer des situations d'enseignement riches et pertinentes sur le plan des apprentissages, contribuant à une construction conceptuelle significative pour les élèves, ce qu'une analyse didactique peut bien sûr permettre d'éclairer, mais de produire des situations qui soient, en plus, viables pour les enseignants dans leur contexte. (Bednarz, 2013, p. 25)

Enfin, sur les effets de cette collaboration, nous retenons, comme Grangeat (2013) que les réorganisations successives dans le travail des enseignant.e.s se font par petites touches, qui selon nous, s'opposent à des changements radicaux qui seraient provoqués par des propositions venant des chercheur.se.s sans prise en compte ou trop éloignées des contextes et des connaissances des enseignants (à la fois mathématiques et pour enseigner).

Les recherches sur le développement professionnel montrent plutôt que celui-ci consiste en des réorganisations successives des conceptualisations, des manières de penser sa propre activité en rapport avec la situation dans laquelle il est inséré. (Grangeat, 2013, p. 158)

En considérant les positions institutionnelles de chacun.e des participant.e.s on peut également décrire notre travail de collaboration comme la « construction d'un monde commun » (Beguïn & Cerf, 2004) comme le précise Mangiante Orsola (2014) qui travaille sur l'enseignement de la géométrie à l'école primaire, également dans le cadre d'un LÉA.

Nous retenons pour notre travail cette notion de « monde » pour conceptualiser le processus dialogique qui nécessairement va s'installer au cœur du dispositif entre d'une part les formateurs/chercheurs et d'autre part les enseignants. La production de ressource est vue comme la construction possible d'un monde commun, un lieu d'échanges, d'apports mutuels mais aussi de mises en tensions entre des mondes (ou points de vue) différents. (Mangiante-Orsola, 2014, p. 140)

Ainsi, au delà du travail réalisé, nous soulignons donc l'importance de la composante collaborative et de la composante analyse réflexive commune. Chaque participant.e apporte donc une expertise différente et complémentaire à l'activité de conception : les enseignant.e.s s'appuient sur leurs connaissances de la discipline enseignée, des élèves et sur leurs expériences professionnelles en tenant compte des contraintes d'enseignement ; la chercheuse apporte des résultats de recherche (ici sur l'algèbre élémentaire) qui sont en évolution au fur et à mesure du travail et des questions. Enfin il est nécessaire que le groupe prenne en compte les questions de diffusion des ressources avec notamment la prise en compte des pratiques des autres professeur.e.s. Les réunions régulières (environ deux par mois), les analyses réflexives sur les séances / séquences élaborées à partir des retours des enseignant.e.s, de documents élèves ou des analyses de vidéos permettent la construction de ce monde commun. Ces allers-retours entre conception et pratique, sous-tendus par des approches théoriques, permettent de penser la structuration des ressources afin de permettre leur diffusion.

Les recherches sur l'algèbre élémentaire

Depuis une quarantaine d'années, l'enseignement de l'algèbre a été l'objet de nombreux travaux de recherche qui ont donné des résultats importants. Il n'est donc pas possible dans ce texte de développer tous ceux qui nous ont servi tout au long de ce travail. Pour plus de détails, on peut se référer aux synthèses faites par Chaachoua (2015), Coppé et Grugeon-Allys (2015) ou encore aux articles rassemblés dans le numéro spécial de Recherches en didactique des mathématiques (Coulange et al., 2012) qui montrent les tendances des recherches actuelles.

Les travaux cités ici font partie des connaissances partagées dans le groupe. Certains ont servi à la construction d'une culture commune, d'autres ont permis une avancée importante du travail (nous y reviendrons dans la partie suivante). Ces recherches n'ont pas été présentées aux enseignant.e.s du groupe au début du travail mais quand le besoin s'en faisait sentir (d'ailleurs certaines n'ont été publiées que récemment). A noter que nous ne citons pas ici les références théoriques plus générales en didactique des mathématiques ou dans d'autres disciplines.

Au début de notre travail, nous avons utilisé les travaux de Chevallard (1985, 1989) qui montre que, comme l'algèbre ne constitue plus un domaine à part des programmes du collège depuis 1971 (contrairement aux périodes précédentes), il est nécessaire de repenser sa place ainsi que ses liens avec l'arithmétique et le numérique.

Nous avons également repris les nombreux travaux, principalement anglophones, qui ont étudié les erreurs et les difficultés des élèves notamment pour le calcul algébrique, en lien avec le statut du signe égal et des lettres et avec la nature des justifications, comme ceux de Booth (1985) ou de Tirosch et al. (1998).

Nous avons également pris en compte les questions de continuités et ruptures entre arithmétique et algèbre. En particulier, Kieran (1990) évoque les fausses continuités. Selon Gascon (1993), l'algèbre élémentaire n'est pas une arithmétique généralisée. Vergnaud (1988) a étudié les caractéristiques des procédures arithmétiques ou algébriques dans la résolution de problèmes. Les résultats de ces recherches permettent d'expliquer certaines des difficultés des élèves à entrer dans la pensée algébrique et, par conséquent, soulignent la complexité pour les enseignant.e.s à introduire l'algèbre.

La mise en perspective de ces résultats de recherche et de faits relatifs à la classe rapportés par les enseignant.e.s (qui du coup ont été réinterprétés) a participé à la construction d'un « monde commun » sur l'enseignement de l'algèbre pour notre groupe.

Enfin, nous avons utilisé les travaux de Bednarz et Janvier (1996) qui déclinent quatre perspectives d'introduction de l'algèbre pour donner du sens aux nouveaux objets : l'approche par la généralisation / récurrence, l'approche par la résolution de problèmes / mise en équation, l'approche par la modélisation et l'approche technologique / fonctionnelle. Plus récemment, Kieran (2007) définit trois aspects de l'activité algébrique avec le modèle GTG pour conceptualiser l'activité algébrique : l'activité générative (d'expressions littérales en lien avec la résolution de problèmes de modélisation ou de preuves), l'activité transformationnelle sur les expressions symboliques (justifiée par les propriétés et notamment la distributivité de la multiplication sur l'addition) et enfin l'activité globale au niveau méta qui considère que l'algèbre est un outil.

Historique du groupe et du LéA réseau d'écoles et collèges Ampère

Pour commencer, nous allons donner quelques informations générales sur l'historique du groupe, puis du LéA Ampère et sur son évolution. Nous tenterons ensuite de dégager les principales étapes du travail fait en montrant comment certains savoirs ont circulé entre les participant.e.s et comment d'autres ont été construits au fur et à mesure du travail collaboratif.

La création du groupe SESAMES Algèbre et du LéA Ampère

Le groupe SESAMES Algèbre a été mis en place à l'initiative de Serge Betton, enseignant de mathématiques, et de la chercheuse Sylvie Coppé, tou.te.s les deux formateur.trice.s dans ce qui s'appelait à l'époque les IUFM⁴, pour travailler sur l'enseignement de l'algèbre. Les raisons qui ont présidé à cette proposition sont multiples, elles portent sur les apprentissages des élèves, sur les pratiques enseignantes et sur l'articulation théorie / pratique. Ainsi, nous avons fait le choix du thème de l'algèbre car nous pensions qu'il était possible de travailler sur les difficultés récurrentes des élèves, analysées dans des recherches, comme nous l'avons vu mais toujours déplorées par les enseignant.e.s. En tant que formateur.trice, nous étions conscient.e.s que les pratiques des enseignant.e.s pour l'enseignement de l'algèbre étaient toujours très formelles, proposant de nombreux exercices de technique et peu portant sur le sens de l'outil algébrique. Il y avait donc un souhait de faire évoluer les pratiques. Enfin nous avons une volonté de garder la mémoire et de diffuser à plus large échelle que nos formations, des activités qui nous semblaient intéressantes, pertinentes afin de favoriser l'activité et la motivation des élèves. Nous cherchions à comprendre pourquoi de telles activités avaient du mal à être proposées dans les classes et, quand elles l'étaient, de façon peu adéquate. On constate donc que ces préoccupations relèvent aussi bien d'une volonté de faire évoluer les pratiques que de questions de recherche sur l'enseignement de l'algèbre et sur la diffusion des ressources.

Quatre enseignant.e.s de collège volontaires nous ont rejoints, choisi.e.s au fil des rencontres (des maître.esse.s de stage, des ancien.e.s stagiaires, etc). Depuis lors, suivant les années, le groupe est composé de cinq à six personnes. Ces trois dernières années, nous avons commencé une collaboration avec des enseignants du primaire pour travailler sur des activités qui peuvent relever de l'Early Algebra (Radford, 2000, 2014).

Un travail important est fait lors des réunions de travail régulières avec tout le groupe dans lesquelles certains thèmes sont discutés, des activités pour la classe sont élaborées ou analysées. Selon les moments et les projets, nous avons fait des enregistrements vidéo de séances de classe, nous avons collecté des documents élèves, nous avons fait passer des entretiens ou des questionnaires aux enseignant.e.s.

La problématique s'est ensuite enrichie de nouvelles questions sur les pratiques qu'on pourrait qualifier d'ordinaires, des enseignant.e.s de mathématiques. Comment les ressources produites peuvent-elles se mettre en place dans les classes ? Quelle est la place de l'algèbre dans l'enseignement au collège, quels sont ses liens avec les autres notions au programme ? Quels dispositifs les membres du groupe ont-ils mis en place dans une perspective de progression des apprentissages et comment compléter les ressources diffusées pour rendre les choix d'enseignement explicites ?

L'évolution du LéA Ampère vers le LéA réseau d'écoles et collèges Ampère

De 2014 à 2017, nous avons travaillé dans le cadre d'un LéA agrandi qui englobait le collège et le lycée Ampère et les membres des groupes SESAMES Algèbre et Sciences Physiques. Notre participation commune au projet ASSIST-ME (Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education, <http://assistme.ku.dk/>) portant sur l'influence des dispositifs d'évaluation (formative et sommative) a permis de faire un état des lieux des pratiques d'évaluation dans les deux établissements et de mutualiser des ressources sur l'évaluation par compétences et sur l'évaluation entre pairs. Des thématiques communes, comme par exemple celle concernant la mise en activité des élèves comme moyen de permettre les apprentissages, ou celle de l'articulation entre dévolution/institutionnalisation, ont aussi fait l'objet d'échanges et de points de convergence entre les deux groupes. Ce double croisement (de discipline et de niveau d'enseignement) a permis le développement du LéA, et renforcé la cohérence collège-lycée.

Depuis septembre 2017, le LéA actuel, devenu le LéA réseau d'écoles et collèges Ampère, s'appuie sur le Projet PREMaTT⁵ (Penser les Ressources de l'Enseignement des

Mathématiques dans un Temps de Transitions). Nous l'avons ouvert aux professeur.e.s des écoles du secteur du collège Ampère (Lyon 2^e), aux enseignant.e.s des réseaux d'éducation prioritaire renforcés (REP+) du collège J. Duclos et P. Valdo (Vaulx en Velin). Le LÉA a donc bénéficié d'une extension dans une dynamique verticale au sein d'un secteur d'enseignement (Cycle 3, Cycle 4 et Lycée) et d'une dynamique horizontale de réseau collaboratif entre établissements liés au groupe SESAMES. Cela a constitué une nouvelle étape pour le LÉA réseau d'écoles et collèges Ampère, qui a intégré un projet du réseau de l'Institut Carnot de l'Éducation, fruit de deux projets convergents (un porté par la recherche et un par les enseignant.e.s). Il s'agit, dans une logique de cycle, d'accompagner les élèves tout au long du cycle 3 à l'entrée dans la pensée algébrique en leur proposant des activités nouvelles et une gestion de classe innovante (la Mise En Train, nous y reviendrons) qui permet aux élèves, de façon régulière, à chaque séance, d'avoir des temps de recherche, d'expérimentation, d'argumentation et de mise en commun des résultats et qui aide à gérer l'hétérogénéité.

Voyons maintenant les grandes étapes de notre travail de collaboration.

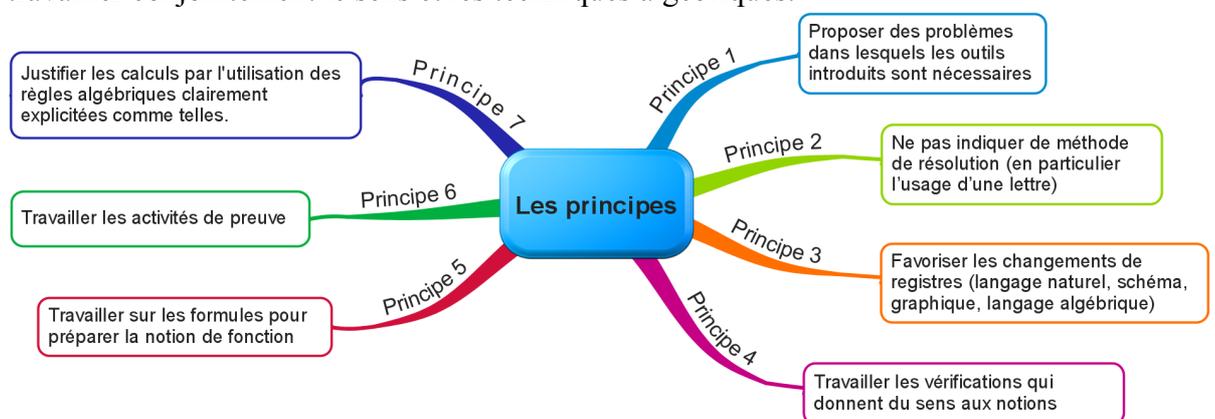
Les étapes de la collaboration

Dans cette partie nous allons décrire et analyser l'évolution du travail fait en identifiant les éléments qui ont permis cette évolution.

Des principes partagés

Une première étape du travail, pour fonder le groupe a consisté en la rédaction de sept principes qui ont toujours guidé nos choix dans l'élaboration des documents pour la classe. Ces principes communs, autour desquels est organisé le travail du groupe, sont régulièrement rediscutés et explicités aux nouveaux membres qui intègrent le groupe. Leur version actuelle est détaillée sur le site PEGAME (figure 1). A travers différentes déclinaisons, il s'agit de :

- favoriser l'activité des élèves,
- donner des finalités à l'enseignement de l'algèbre,
- travailler conjointement le sens et les techniques algébriques.



L'image Les principes.png

Figure 1 : Les 7 principes organisateurs du travail

Il est à noter que le principe 6 (travailler sur les activités de preuve) qui pouvait paraître très innovant dans les années 2000, l'est beaucoup moins actuellement car les programmes scolaires ont évolué. En effet, dans les années 2000, en France, conformément au programme, l'entrée dans l'algèbre se faisait essentiellement par les équations alors que depuis les programmes de 2005, l'entrée par les problèmes de preuve et de généralisation est de plus en plus clairement affirmée comme en atteste l'extrait ci-dessous (fig. 2). Cependant, nous avons montré que les pratiques n'évoluent pas aussi vite, à commencer par les manuels qui, dans

leurs éditions de 2006 et 2011, proposaient encore peu de problèmes de preuve et de généralisation (Coppé & Grugeon- Allys, à paraître).

Utiliser le calcul littéral	
<p>Mettre un problème en équation en vue de sa résolution.</p> <p>Développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples.</p> <p>Résoudre des équations ou des inéquations du premier degré.</p> <p>» Notions de variable, d'inconnue.</p> <p>Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.</p>	<p>Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables (en mathématiques ou dans d'autres disciplines).</p> <p>Tester sur des valeurs numériques une égalité littérale pour appréhender la notion d'équation.</p> <p>Etudier des problèmes qui se ramènent au premier degré (par exemple, en factorisant des équations produits simples à l'aide d'identités remarquables).</p> <p>Montrer des résultats généraux, par exemple que la somme de trois nombres consécutifs est divisible par 3.</p>

Image : ExtraitProgramme.PNG

Figure 2 : Extrait du programme français mis en place en 2016, cycle 4 (BO spécial n°11 du 28 novembre 2015 p. 373)

Elaboration d'activités innovantes et pertinentes mais isolées

Un premier travail de conception a porté d'une part sur l'élaboration et l'expérimentation d'activités de classe et d'autre part, sur la conception du site. Pour ce dernier point, nous avons bénéficié de l'expérience du groupe SESAMES sciences physiques et du site PEGASE (<http://pegase.ens-lyon.fr/>). Nous avons conservé les deux entrées pour le site : l'une comporte des activités à proposer dans les classes, classées par niveau, (rubrique « Enseigner ») et l'autre présente des documents qui doivent permettre aux enseignants de mieux comprendre nos choix (rubrique « Se former ») afin de permettre une utilisation en classe plus conforme à ce que nous proposons. Bien sûr, les documents ont été réactualisés chaque fois que nécessaire en fonction de nouveaux programmes et/ou de l'organisation des cycles.

En ce qui concerne les activités de classe, en étudiant celles proposées dans les manuels, nous avons conclu que dans les problèmes proposés (lorsqu'il y en a), l'introduction de la lettre n'est que rarement à la charge des élèves (il y a toujours par une indication comme « appelle $x...$ »). Ainsi on peut penser que les élèves vont avoir des difficultés à comprendre l'utilité de l'introduction de la lettre (de plus, la plupart des problèmes amenant à une équation peuvent se résoudre de façon arithmétique) et sa pertinence dans différents types de problèmes. Cela explique la plainte récurrente des enseignant.e.s notamment ceux de lycée, sur le fait que les élèves ne mobilisent pas l'outil algébrique si on ne leur indique pas. Une partie importante de notre travail a donc été d'élaborer des problèmes qui laissaient à l'élève la charge de trouver les outils de modélisation, sans contraindre les méthodes (principes 1 et 2). Nous avons, par exemple, repris l'activité du carré bordé (Combiér, Guillaume & Pressiat, 1996) en adaptant la question et en fournissant aux enseignants des justifications des choix faits.

Cependant, lors des expérimentations faites en classe ou lors de stages de formation continue, nous avons constaté des difficultés récurrentes dans la gestion de cette activité en classe : affaiblissement des enjeux d'apprentissage ou bien guidage très fort par de nombreuses

questions intermédiaires ou enfin des difficultés dans la gestion de la mise en commun. Ces constatations nous ont permis de mieux comprendre les problèmes de diffusion des ressources issues de la recherche et cela nous a amené à travailler non plus sur des activités isolées mais sur des séquences d'enseignement.

Analyse des difficultés de diffusion des activités

Plusieurs travaux de recherche comme ceux de Coulange & Grugeon- Allys (2008) ou de Mangiante Orsola (2014) ont souligné la difficulté, pour les enseignant.e.s, de mettre en place dans leurs classes des activités potentiellement riches d'un point de vue didactique. Nous avons été confronté à cette difficulté dont l'analyse a mis en évidence trois points. Le premier est général, il se situe au niveau des pratiques d'enseignement dont Robert et Rogalski (2002) indiquent quelles sont stables :

Nous admettons comme hypothèse de travail que les pratiques des enseignants et des enseignantes sont complexes, stables et cohérentes, et qu'elles résultent de recompositions singulières (personnelles) à partir des connaissances, représentations, expériences, et de l'histoire individuelle en fonction de l'appartenance à une profession. (Robert & Rogalski, 2002, p. 508)

Ainsi, il est difficile pour un.e enseignant.e de changer radicalement ses pratiques d'enseignement. Or les problèmes que nous proposons nécessitent de bien comprendre leurs enjeux afin de ne pas dénaturer la tâche par exemple en refermant les consignes, en ajoutant des questions intermédiaires pour orienter le travail des élèves. De plus, la résolution de ces problèmes nécessite un temps de recherche suffisant, une discussion et un classement des procédures en collectif et une institutionnalisation en lien avec ce qui a été travaillé. On note donc toute la complexité de la tâche d'enseignement pour un.e enseignant.e qui n'a pas participé au travail du groupe. Il est donc probable que ces activités non seulement riches d'un point de vue didactique mais qui demandent une gestion de classe alternant des travaux de groupes, des mises en commun sont difficiles à mettre en place si elles ne font pas partie des pratiques habituelles de l'enseignant.e ou s'il/elle ne bénéficie pas d'un environnement de travail qui l'engage à tester de nouvelles pratiques (Coppé et al., 2016). C'est ce que souligne Roditi (2008) à partir de son travail sur la multiplication des décimaux.

L'analyse des stratégies d'enseignement montre que les ingénieries didactiques ne sont pas reprises dans l'enseignement ordinaire mais, au-delà de ce constat, des divergences apparaissent, notamment concernant l'introduction et l'institutionnalisation du nouveau savoir. (Roditi, 2008, p. 83)

Le deuxième et le troisième point sont plus spécifiques à l'enseignement de l'algèbre. Tout d'abord, nous étions focalisés sur le fait de trouver des activités qui permettent vraiment l'introduction de la lettre en prenant bien sûr pour référence la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1986). Or, il s'avère qu'il est difficile de trouver de telles activités et nous pensons maintenant qu'il est plus important de montrer différents types de problèmes qui donnent du sens (et ce, très tôt dans la scolarité) en laissant cette introduction à la charge de l'enseignant.e si elle ne vient pas des élèves. Autrement dit la variété des types de tâches et l'articulation avec les techniques de calcul (voir le paragraphe suivant) nous paraissent plus importantes que de trouver une activité qui permet d'introduire la lettre.

Enfin ce travail d'analyse des difficultés de diffusion de ces activités nous a amené à comprendre les liens complexes entre le sens (donné par les entrées dans l'algèbre et les types de problèmes) et les techniques de calcul en algèbre. Ainsi, lors de certaines activités de généralisation comme celle du carré bordé (Combié et al., 1996), les élèves produisent divers moyens de calcul ou formules dont il faut montrer la validité mais aussi l'équivalence. Pour cela doivent être mobilisées des techniques de calcul littéral ainsi que des propriétés mathématiques (en particulier la distributivité de la multiplication sur l'addition) qui permettent de les justifier. Mais, selon nous, ces techniques ne doivent pas précéder les

problèmes qui donnent du sens (or c'est souvent ce qui est fait dans les classes et nous le déplorons). Pour l'enseignant.e, il y a donc un travail subtil à faire pour articuler des problèmes et les techniques de calcul littéral.

A partir de là, nous avons réorienté notre travail de conception de ressources. Ce changement dans le travail du groupe constitue un exemple d'aller-retour entre conception et mise en place dans la classe soutenu par la recherche : à partir de l'élaboration d'une activité innovante et de l'analyse de sa mise en œuvre et de sa diffusion, une nouvelle question est apparue qui a engendré une modification de l'activité et plus largement de la progression des activités.

De plus, ces réflexions nous ont amenés à faire un travail d'analyse des programmes et des manuels sur la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition pour en conclure que celle-ci était peu mise en avant comme élément de justification.

« Il en résulte que la propriété de distributivité perd sa prépondérance technologique pour justifier et valider les calculs. Il y a donc un risque que les élèves ne l'utilisent pas et se rabattent sur des techniques portant sur les transformations d'écritures exclusivement basées sur des ostensifs, avec des critères de vérification peu opérationnels portant sur la forme. » (Assude, Coppé, & Pressiat, 2012, p. 55)

Toutes ces raisons nous ont amenés à revoir notre travail de conception de ressources afin de proposer non plus des séances mais des séquences d'enseignement intégrant à la fois les questions de sens et de techniques de calcul avec un appui sur la distributivité. Dans le même temps, nous avons fait un travail de recherche sur la diffusion dans lequel nous avons analysé des articles de documentation professionnelle qui proposaient des activités innovantes en algèbre et nous avons pu vérifier que la plupart étaient des activités isolées qui étaient diffusées sans que la question de leur intégration dans des séquences de classe soit envisagée (Coppé & Grugeon- Allys, 2015).

Elaboration de séquences de classe

Nous avons donc cherché à construire non plus des problèmes isolés mais des séquences de classe. En nous appuyant les travaux de Bednarz et Janvier (1996) cités plus haut nous avons finalement privilégié trois entrées pour l'algèbre : la généralisation, l'établissement de preuves et les équations. De plus, nous avons repris les travaux de Ruiz Monzon (2010) qui définit l'algèbre élémentaire comme un processus d'algébrisation des programmes de calcul et qui propose des organisations mathématiques en lien notamment avec la modélisation fonctionnelle. Nous avons ainsi utilisé les programmes de calcul, introduits par Drouhard (1995), comme un outil, qui s'avère facile à utiliser par les enseignants et par les élèves car le texte est en général simple (à la différence de certains problèmes). Voici un exemple de problème avec un programme de calcul qui aboutit à une résolution d'équation et un autre à l'établissement d'une preuve.

Je pense à un nombre, j'ajoute 4, puis je multiplie le résultat par 7. J'ajoute le nombre de départ et je trouve 25. Quel était le nombre de départ ?

Je pense à un nombre, je le multiplie par 5 puis j'ajoute 3. Je multiplie le résultat par 2 et j'enlève 10 fois le nombre de départ. Fais quelques essais. Que constates-tu ? Est-ce toujours vrai ? Prouve-le.

Les programmes de calcul permettent de travailler différents types de problèmes qui montrent des raisons d'être de l'algèbre en s'appuyant sur les techniques du calcul littéral et en mettant en avant les justifications par la propriété de distributivité dont nous avons montré qu'elle n'était pas perçue et utilisée comme telle notamment dans les manuels (Assude et al., 2012).

Chevallard (2007) dans ses cours aux professeurs de mathématiques stagiaires, développe cette notion en indiquant notamment qu'ils peuvent être utilisés dès le primaire, idée que nous partageons.

Il est de même usuel de parler d'expression algébrique, sans que l'on sache ce que cette « expression » exprime ! Pour qu'il en aille autrement, il convient de partir de ce dont nous parle l'algèbre : $3x^2$, par exemple, est l'expression algébrique (ou littérale) d'un certain programme de calcul, à savoir le programme de calcul qui, étant donné un nombre x , « renvoie » le nombre $3x^2$, et qui, donc, pour $x = 1$, renvoie 3, pour $x = 4$ renvoie 48, etc. L'algèbre élémentaire est ainsi la science des programmes de calcul (sur les nombres), et en particulier la science du calcul sur les programmes de calcul. La notion de programme de calcul se construit aujourd'hui à l'école primaire et dans les premières années du collège : elle formalise l'idée de « faire un calcul », c'est-à-dire le fait d'opérer sur des nombres d'une manière déterminée, selon un certain programme. (Chevallard, 2007, pp. 167-168)

Il est alors possible de proposer des progressions dans les objectifs d'enseignement selon le niveau de classe en jouant sur les variables didactiques (nombres en jeu, formes des programmes, procédures personnelles / expertes). Les programmes de calcul permettent de travailler dans différents registres de représentation ainsi que sur les aspects structural et procédural (Sfard, 1991). En résumé ils amènent à penser les apprentissages des élèves en fonction des savoirs en jeu en sortant des chapitres classiques qui proposent généralement un travail séparé sur le sens et sur les techniques opératoires (d'ailleurs, souvent en commençant par les techniques) en se centrant davantage sur les raisons d'être et finalement, en partant de la question génératrice : À quelles conditions deux programmes de calcul donnent-ils le même résultat ? Toujours le même résultat ?

Une partie de notre travail (Alves et al., 2013) a donc consisté à développer des progressions mettant en jeu des preuves ou bien différents types d'équations (des organisations mathématiques ponctuelles ou locales au sens de Chevallard (1998, 1999)). Pour résumer, la figure 3 montre les potentialités de l'utilisation des programmes de calcul entre la fin de l'école primaire et le collège.

Cette évolution dans les ressources produites montre les aller-retour entre théorie et pratique. Des difficultés d'enseignement apparues lors de changements de pratiques ont amené des questions sur la diffusion. Des éléments de réponse ont été trouvés dans des recherches mais il a fallu alors les intégrer aux pratiques, ce qui a conduit à de nouveaux changements qui portent sur les savoirs à enseigner / enseignés (c'est ce que nous avons vu) mais aussi sur la gestion de classe (c'est ce que nous allons voir).

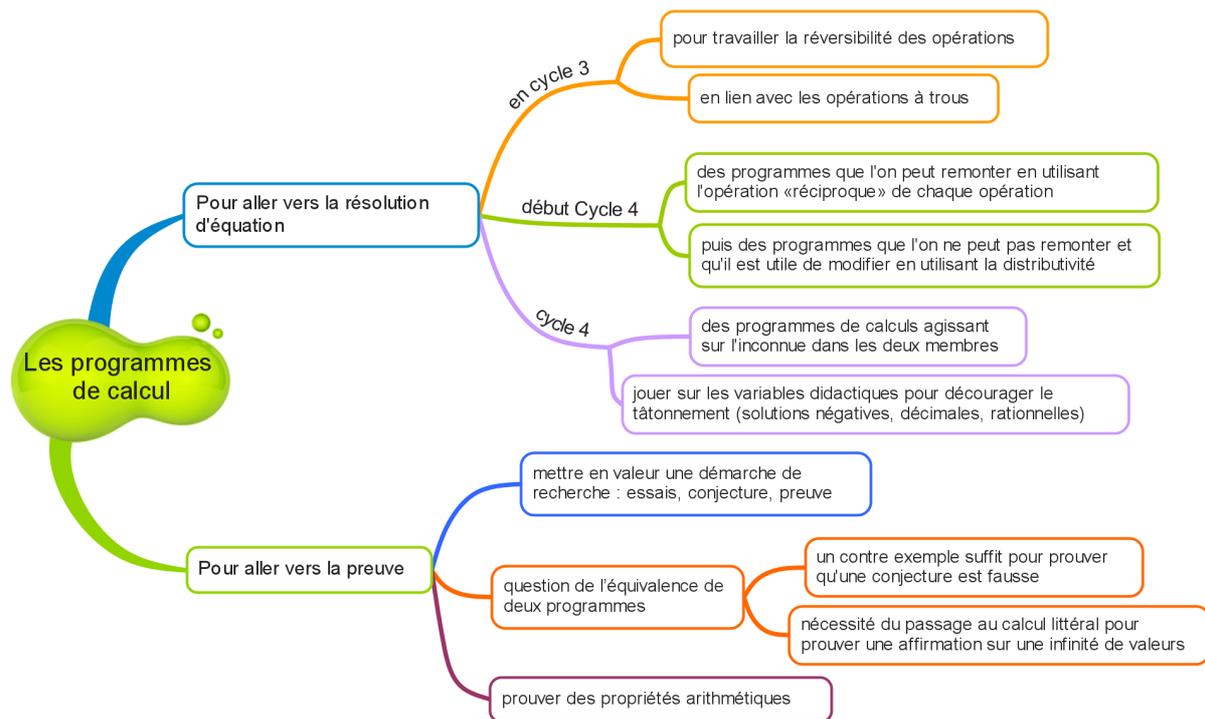


Figure 3 : Utilisation des programmes de calcul

Modification de la conception des séances : Les mises en TRAIN

En même temps que le groupe élaborait des activités de classe notamment avec les programmes de calcul, les enseignant.e.s ont développé une gestion de classe originale privilégiant les apprentissages sur la durée, basée sur des cycles dévolution / institutionnalisations locales / réinvestissements. Elles/ Ils l'ont désignée sous le terme de MET « mise en TRAIN » : Travail de Recherche ou d'Approfondissement avec prise d'Initiatives (Martin Dametto et al., 2013). L'idée de cette pratique vient des activités de calcul mental réalisées sous forme de rituels qui ont été mises en avant dans les programmes de l'école primaire puis du collège depuis de nombreuses années. Les idées principales qui sont à l'origine de ce changement sont les suivantes. Tout d'abord rompre avec les pratiques ordinaires, basées sur le découpage des notions en chapitres, comportant une évaluation finale sur laquelle on peut difficilement revenir, qui entraînent souvent la parcellisation des connaissances des élèves. Il s'agit donc de favoriser des apprentissages dans la durée. La deuxième idée porte sur la mise en recherche des élèves. Des problèmes sont proposés à tout moment des séquences d'enseignement et notamment au début, les procédures personnelles sont alors favorisées, puis grâce à des jeux sur les variables, certaines procédures sont abandonnées pour d'autres plus performantes qui peuvent alors être institutionnalisées (pour un temps ou de façon plus définitive), puis de nouveaux exercices sont proposés pour l'entraînement. Un nouveau cycle débute alors avec un autre type de problème (voir un exemple dans Coppé, à paraître).

Enfin une dernière raison est d'ordre plus organisationnel, il s'agit de favoriser la mise au travail rapide des élèves. Ainsi quand ils entrent dans la classe, un exercice est déjà posé et les élèves se mettent immédiatement au travail sans temps mort.

Grâce à ce dispositif de gestion de classe, les enseignant.e.s ont donc changé la structure de leurs séances : un temps de mise en TRAIN qui dure, en général, 15 à 20 minutes, puis un temps court de correction d'exercices donnés à la maison et enfin le travail sur le chapitre en

cours. Le corps du chapitre est court et il correspond à l'institutionnalisation de procédures expertes. A cette occasion, la trace écrite est explicitée dans le cahier de leçons et l'enseignant.e peut alors proposer des exercices de réinvestissement. Le travail sur la notion en jeu se poursuit alors en MET parallèlement à un autre chapitre. Ou bien, lors des MET, il est également possible d'anticiper sur un chapitre ultérieur en proposant plusieurs approches d'une notion. Ainsi cette forme de travail permet de travailler les notions dans une temporalité longue, de différer le bilan expert avec des synthèses locales qui constituent la mémoire collective de la classe et qui permettent à chaque élève de s'approprier les savoirs et les savoir-faire au moment de l'année où ils prennent sens pour elle/lui. Grâce à cette gestion de classe, les élèves et plus généralement la classe sont davantage impliqués dans des activités de recherche. On peut constater des effets sur la participation des élèves et sur leur motivation. Les progressions annuelles sont elles aussi modifiées et intègrent une programmation des thèmes des MET. Ce changement dans les pratiques est important puisqu'il entraîne une modification de la structure « classique » des chapitres en se centrant non plus sur des thèmes mathématiques mais plutôt sur des types de problèmes mettant en jeu les savoirs visés, en permettant de travailler sur le long terme, en amont des apprentissages visés et d'effectuer des retours et des reprises.

Pour conclure, voici le schéma que nous proposons sur le site pour décrire à la fois l'organisation et les effets des MET.

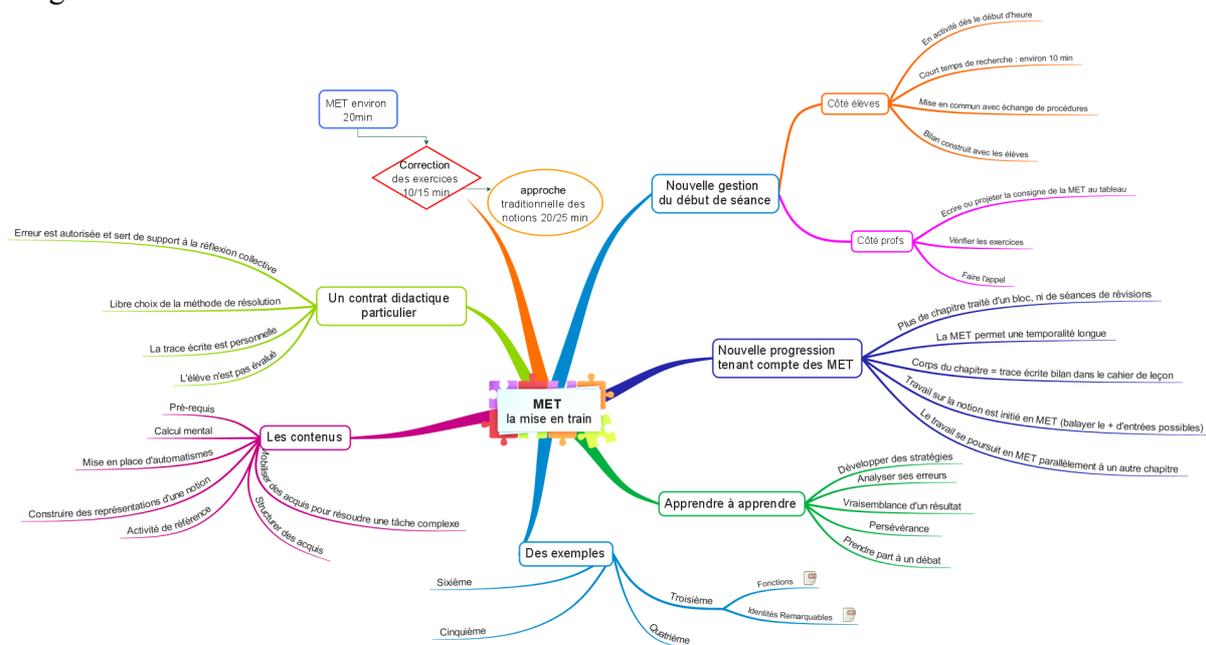


Image MET la mise en train.png

Figure 4 : Intérêts des mises en TRAIN

Elargissement des thèmes, participation à d'autres projets

De 2007 à 2016, le groupe SESAMES et le LéA réseau d'écoles et collèges Ampère ont participé à deux projets européens de recherche : S-TEAM (Science-Teacher Education Advanced Methods, 2007-2013) sur les démarches d'investigation et ASSIST-ME sur l'influence des dispositifs d'évaluation (formative et sommative) sur les pratiques enseignantes et sur les apprentissages des élèves lors de la résolution de problèmes.

La participation à chacun de ces projets a provoqué une évolution pour les enseignant.e.s du LéA réseau d'écoles et collèges Ampère. La participation à la recherche S-TEAM, qui correspondait à l'introduction des MET et des programmes de calcul nous a permis de travailler sur les alternances dévolution / institutionnalisation (Coppé, 2013). Une

conséquence importante pour le LéA réseau d'écoles et collèges Ampère a été la diffusion plus large des MET dans les classes des enseignant.e.s du réseau d'établissements.

La participation au projet ASSIST Me a développé des pratiques d'évaluation plus tournées vers l'évaluation par les pairs et l'auto-évaluation (Coppé & Moulin, 2017 ; Coppé & Roubin, 2019). Il est à noter qu'à ce moment là du travail, dans le cadre des projets européens, les enseignantes les plus anciennes dans le groupe, ayant acquis une expertise dans le travail avec la chercheuse, ont davantage adopté une posture de recherche et ont participé au travail de recueil de données, voire de traitement. Elles ont également écrit des articles pour des revues professionnelles (bulletins APMEP, Cahiers Pédagogiques) ou de présentations lors de colloques⁶.

Travail avec les enseignant.e.s du primaire

Le projet PREMaTT, dans sa dimension inter-établissements, a fait passer à l'échelle de la circonscription et non plus seulement de l'établissement puisqu'il s'agit de travailler la liaison entre primaire et secondaire dans le cadre du cycle 3. L'idée est de produire et diffuser des ressources pour le cycle 3 de la même façon que ce qui a été fait pour les classes du collège. En lien avec le thème de l'algèbre au collège, nous cherchons maintenant à déterminer quels types de problèmes pourraient être proposés aux élèves d'école primaire et de 6^e, dans le cadre des programmes actuels, pour travailler sur les continuités et ruptures entre arithmétique et algèbre ou numérique et algébrique. Pour le moment nous avons défini deux pistes de travail dont une sur les problèmes dits « de patterns », mais nous avons encore peu de résultats.

Il s'agira de voir quelles adaptations de dispositif de recherche collaborative proposer conjointement à l'école primaire et en classe de 6^e. Le travail collaboratif entre enseignants se heurte à plusieurs difficultés : comment favoriser l'échange entre enseignants d'équipes qui se partagent le même cycle 3, mais d'établissements différents du 1^{er} et 2nd degré et de territoires géographiques différents ? Comment penser des formes de collaboration au sein d'un collectif élargi ? Et plus largement peut-on s'entendre sur une conception commune des mathématiques et définir l'activité mathématique ?

En guise de conclusion : des évolutions chez les enseignant.e.s et chez la chercheuse

Ce texte nous a permis de faire le point sur l'évolution du groupe SESAMES et du LéA réseau d'écoles et collèges Ampère. Par l'étude des évolutions portant à la fois sur les thèmes et sur les modalités de gestion de classe, nous avons tenté de montrer comment certains savoirs ont été utilisés parce qu'ils permettaient de construire des éléments de réponse à des questions sur l'algèbre, son enseignement ou sur les élèves et comment d'autres ont été construits par le biais de l'élaboration des ressources.

Pour terminer nous allons montrer en quoi et sur quoi la participation à ce travail dans le cadre du réseau des LéA a amené des évolutions à la fois chez les enseignant.e.s et chez la chercheuse. En introduction, nous citons Desgagné (1997) sur la recherche collaborative.

La conséquence d'une telle perspective de recherche est que le projet de collaboration qui place le chercheur en situation de coconstruction avec des praticiens peut être vu autant et simultanément comme une activité de recherche et de formation. En effet, s'allier à des praticiens pour coconstruire un objet de connaissance c'est du même coup les faire entrer dans une démarche de perfectionnement sur un aspect de la pratique professionnelle qu'ils exercent. (Desgagné, 1997, p. 376)

Tout d'abord, cette recherche a permis des évolutions dans l'expertise des enseignant.e.s à deux niveaux. Tout d'abord, celui des pratiques de classe avec une attention accrue aux élèves notamment par le biais des MET et de l'évaluation formative mais également avec les changements dans les progressions et les structures des séances.

Mais ce sont aussi des changements de l'identité professionnelle qui sont très importants. Des changements ont eu lieu du côté de leur professionnalité, ils/elles ont acquis des qualifications comme le Certificat d'Aptitude aux Fonctions de Formateur Académique (secondaire) ou le Certificat d'Aptitude aux Fonctions d'Instituteur ou de Professeur des Écoles Maître Formateur (primaire) ; elles/ils ont pris des responsabilités dans la formation des enseignant.e.s et sont devenues formateur/trice.s, en formation initiale ou continue ou Référent.e Mathématique de Circonscription. De nombreux stages de formation continue sur l'algèbre ou plus récemment sur l'évaluation ont été animés. Là encore, il est à souligner que lors de ces formations, les enseignant.e.s devenus formateur/trice.s présentaient les ressources élaborées tout en s'appuyant sur des connaissances provenant de la recherche dont certaines étaient présentées et d'autres servant d'appui.

Le groupe a été sollicité pour élaborer un parcours de formation à distance "Une entrée possible dans l'algèbre par les programmes de calcul" qui est disponible depuis mars 2016 dans l'offre de parcours mutualisés (origine IFÉ) de la plateforme nationale M@gistère⁷. Il a pour objectif de faire évoluer les pratiques, dans le cadre de l'enseignement de l'algèbre au collège. Enfin les enseignant.e.s ont tissé des liens avec d'autres collectifs, institutionnels comme le Groupe de Ressources Disciplinaires, l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, l'IFÉ ou associatifs comme l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public. Ces changements, ce qu'elles/ils ont appris, cet enrichissement personnel, se retrouve aussi dans ce qu'ils apportent aux collègues dans leurs établissements. D'ailleurs, il est à noter que, certaines années, la productivité du groupe en termes de production de ressources a été affectée par ces sollicitations externes variées.

Le LéA réseau d'écoles et collèges Ampère s'est lui aussi transformé au travers des interactions sociales marquantes et des rencontres régulières avec les autres LéA au sein du réseau qui ont permis un effet chambre d'écho ainsi qu'avec les établissements du réseau de l'ICÉ (découverte d'autres fonctionnements comme autant d'ouvertures).

Les apports pour la chercheuse sont de différents types. En ce qui concerne la recherche sur l'enseignement de l'algèbre, nous avons éclairci les différentes entrées dans l'algèbre, nous avons développé les potentialités de l'outil programmes de calcul et nous avons étudié la place péjorée de la distributivité dans l'enseignement actuel (également mis en lumière par Constantin, 2014). Nous avons également élargi nos recherches à l'évaluation (Coppé, 2018; Chanudet et al., 2019).

Pour la recherche sur les pratiques, ce travail a été l'occasion de mieux comprendre comment et à quelles conditions les pratiques pouvaient évoluer et notamment de comprendre pourquoi certaines ingénieries didactiques n'étaient reprises dans les classes. Nous avons pu bien mesurer les contraintes de différents ordres qui pèsent sur les enseignant.e.s et qui rendent quelquefois les changements de pratiques trop difficiles. La structure et la finalité du réseau des LéA est un facilitateur de cette compréhension.

Enfin tout ce travail nous donne des pistes pour la formation des enseignants. Les deux points importants qui ressortent sont d'une part les caractéristiques de la collaboration vue comme la construction d'un monde commun (là encore la structure du réseau des LéA permet cela) et non comme une transmission top down de la recherche vers l'enseignement et d'autre part la réalisation d'un travail sur la durée pour permettre des évolutions. Sur ce dernier point concernant la formation, des évolutions importantes sont nécessaires.

Bibliographie

Alves, C., Coppé, S., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C., & Roubin, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, 92, 9-30.

- Assude, T., Coppé, S., & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège : Atomisation et réduction. In L. Coulange, J. L. Dorier, J. P. Drouhard, & A. Robert, *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*. (pp. 41-62). La Pensée Sauvage.
- Bednarz, N. (2013). Regarder ensemble autrement : Ancrage et développement des recherches collaboratives en éducation au Québec. In N. Bednarz (Éd.), *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement*. (pp. 13-30). L'Harmattan.
- Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool : Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, *Approaches to algebra, perspectives for research and teaching*. (pp. 115-136). Kluwer Academic Publishers.
- Beguín, P., & Cerf, M. (2004). Formes et enjeux de l'analyse de l'activité pour la conception des systèmes de travail. *Activités*, 1(1), 54-71.
- Booth, L. (1985). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, 5, 5-17.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-116.
- Chaachoua, H. (2015). Etude comparative des recherches sur l'apprentissage de l'algèbre élémentaire : Rapports croisés, bilan et perspectives. In D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, S. Clivaz, G. Cirade, S. Gobert, C. Hache, M. Hersant, & C. Mangiante Orsola (Eds), *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif* (pp. 21-39). La pensée sauvage.
- Chanudet, M., Coppé, S., Gandit, M., & Moulin, M. (2019). Analyse des interactions didactiques dans une perspective d'évaluation formative. In S. Coppé & E. Roditi (Éds.), *Nouvelles perspectives en didactique : Géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques*. (pp. 453-475). La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, 5, 51-94.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : Perspectives curriculaires : La notion de modélisation. *Petit x*, 19, 45-75.
- Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche Anthropologique. In R. Noirfalise (Éd.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques. Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle* (pp. 119-140). IREM de Clermont Ferrand.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.
- Chevallard, Y. (2007). *Séminaire PLC2, année universitaire 2006-2007*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Seminaire_2006-2007.pdf
- Combiér, G., Guillaume, J. C., & Pressiat, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège*. INRP.
- Constantin, C. (2014). *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?* Thèse de l'université d'Aix-Marseille.
- Coppé, S. (à paraître). Conception collaborative de ressources pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire : Une entrée par les programmes de calculs. In H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner, & M. Larguier (Éds.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherche et perspectives curriculaires*. (Livres en ligne du CRIRES.).
- Coppé, S. (2013). Effets du travail collaboratif sur la pratique d'enseignement : Une étude de

- cas d'une enseignante de mathématiques en collège. In M. Grangeat (Éd.), *Les enseignants des sciences face aux démarches d'investigation : Des formations et des pratiques de classe*. (pp. 115-125). Presses universitaires de Grenoble.
- Coppé, S. (2018). Évaluation et didactique des mathématiques : Vers de nouvelles questions, de nouveaux travaux. *Mesure et Évaluation en Éducation*, 41(1), 7-39.
- Coppé, S., & Grugeon- Allys, B. (à paraître). Des ressources aux outils pour l'enseignement. : Quelles conditions ? In *Colloquium CORFEM*. Presses Universitaires de Franche Comté.
- Coppé, S., & Grugeon- Allys, B. (2015). Étude multidimensionnelle de l'impact des travaux de recherche en didactique dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire : Quelles évolutions ? Quelles contraintes ? Quelles perspectives ? In D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, G. Cirade, S. Clivaz, S. Gobert, C. Hache, M. Hersant, & C. Mangiante Orsola, *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif* (pp. 41-74). La Pensée Sauvage.
- Coppé, S., Grugeon- Allys, B., & Pilet, J. (2016). Conditions pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique des mathématiques : L'exemple du carré bordé. *Petit x*, 102, 57-80.
- Coppé, S., & Moulin, M. (2017). Évaluation entre pairs et débat argumenté dans le cadre d'un problème complexe en mathématiques. *Canadian journal of sciences, mathematics and technology education*, 17, 308-327.
- Coppé, S., & Roubin, S. (2019). Intégrer des évaluations entre pairs dans les séances de mathématiques : Un exemple en algèbre au collège. In M. Abboud, *Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines. Actes du colloque Espace Mathématique Francophone*. (pp. 953-962). <https://emf2018.sciencesconf.org/>
- Coulange, L., Dorier, J. L., Drouhard, J. P., & Robert, A. (Éd.). (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*. La Pensée Sauvage.
- Coulange, L., & Grugeon- Allys, B. (2008). Pratiques enseignantes et transmission de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x*, 78, 5-23.
- Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : L'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, 23(2), 371-393.
- Drouhard, J. P. (1995). Algèbre, calcul symbolique et didactique. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin Glorian, *Actes de la 8e Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*. (pp. 325-344). IREM de Clermont-Ferrand.
- Gascon, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternance à «l'arithmétique généralisée». *Petit x*, 37, 43-63.
- Grangeat, M. (2013). Modéliser les enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation : Développement des compétences professionnelles, apport du travail collectif. In M. Grangeat (Éd.), *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation*, (pp. 199-234). Presses Universitaires de Grenoble.
- Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick, *Mathematics and cognition. A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education*. (pp. 96-112). Cambridge University Press.
- Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School through College Levels : Building Meaning for Symbols and their Manipulations. In F. K. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). NCTM.
- Mangiante Orsola, C. (2014). Une étude du processus d'appropriation par des enseignants de situations produites par la recherche pour l'enseignement de la géométrie. In S. Coppé & M. Haspekian, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de 2013* (pp.

137-158). IREM de Paris 7.

Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C., & Roubin, S. (2013). TRAIN : Travail de Recherche ou d'Approfondissement avec prise d'Initiative. *Bulletin de l'APMEP*, 502, 11-22.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking : A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268.

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, 26, 257-277.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(4), 505-528.

Roditi, E. (2008). Des pratiques enseignantes à la fois contraintes et personnelles, et pourtant cohérentes. In F. Vandebrouck (Éd.), *La classe de mathématiques, activités des élèves et pratiques des enseignants*. (pp. 73-94). Octares.

Ruiz Monzon, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Thèse de l'Université Autonome de Barcelone.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Tiberghien, A., Vince, J., & Gaidioz, P. (2009). Design-based Research : Case of a teaching sequence on mechanics. *International journal of science education.*, 31(7), 2275-2314.

Tirosh, D., Even, R., & Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions : Teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 51-64.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In C. Laborde, *Actes du colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*. (pp. 189-199). La pensée sauvage.

¹ Voici la liste des enseignants qui participent/ont participé au groupe : Christophe Alves, Olivier Arrouch, Véronique Berger, Serge Betton, Maud Chanudet, Anne Sophie Cherpin, Martine Dahmani, Vincent Duval, Stéphane Garapon, Alexandra Goislard, Sylvie Martin-Dametto, Claire Piolti-Lamorthe, Sophie Roubin et Etienne Spaak.

² Unité mixte de recherche 5191

³ Institut Français de l'Éducation

⁴ Institut universitaire de formation des maîtres, ensuite appelé ESPE (Ecoles supérieures du professorat et de l'éducation) et actuellement ce sont les INSPE (Institut national supérieures du professorat et de l'éducation)

⁵ Alturkmani, M.-D., Roubin, S., Piolti-Lamorthe, C., Trouche, L., et al. (2019). Penser les ressources de l'enseignement des mathématiques dans un temps de transitions 2017-2019, programme de l'institut Carnot de l'éducation : rapport scientifique des composantes PR 03 et PAE 21. IFÉ-ENS Lyon ([en ligne](#))

⁶ Cherpin, A. S., Piolti-Lamorthe, C. & Roubin, S. (2017). Une entrée dans l'algèbre par les programmes de calcul. Communication aux Journées Nationales de l'APMEP, Nantes, 23 octobre 2017.

Cherpin, A. S. & Boyé, C. (2017). Film et fonctions. Communication aux Journées Nationales de l'APMEP, Nantes, 23 octobre 2017.

⁷ Roubin, S. & Goislard, A. (2016). Présentation du M@gistère « Une entrée possible dans l'algèbre par les programmes de calcul ». Démonstration. 6^e rencontre nationale des LéA, Institut français de l'éducation, ENS de Lyon, 25 mai 2016.